Choix de portefeuille et Médaf

Mathieu Bourges

Michaël Sibilleau

Mardi 17 octobre 2006

Principe de diversification

Ce que l'on veut montrer :

La diversification d'un portefeuille réduit – voire élimine – les risques individuels exogènes

Soit un portefeuille P constitué de 2 actifs risqués :

$\omega_1 \quad \mu_1$ resp. part et rendement espéré de l'actif 1

$\omega_2 \quad \mu_2$ resp. part et rendement espéré de l'actif 2

$$\begin{cases} R_p = \omega_1 \times r_1 + \omega_2 \times r_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$E(R_p) = \omega_1 \times \mu_1 + \omega_2 \times \mu_2$$

$$\boxed{E(R_p) = \omega_1 \times \mu_1 + (1 - \omega_1) \times \mu_2}$$

Variance du portefeuille P :

$$\sigma_P{}^2 := Var(R_p) = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,cov(r_{1,}r_2)$$

$$\sigma_P{}^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 + 2\,\omega_1(1-\omega_1)\,cov(r_{1,}r_2)$$

- On suppose : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et $\mu_1 > \mu_2$

  Les agents sont <u>riscophobes</u> et <u>insatiables</u>

- et on pose : $\rho(r_{1,}r_2) := \dfrac{cov(r_{1,}r_2)}{\sigma_1\sigma_2}$

$$\sigma_P{}^2 = \sigma_1^2 [\omega_1^2 + (1-\omega_1)^2 + 2\omega_1 (1-\omega_1) \rho(r_{1,} r_2)]$$

Minimisation de la variance du portefeuille P :

$$\boxed{\frac{d\sigma_P^2}{d\omega_1} = -2\sigma_1^2 [(1-2\omega_1)(1-\rho(r_{1,} r_2))] = 0}$$

- $\boxed{\text{si } \rho(r_{1,} r_2) = 1}$ alors $\sigma_P^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

  et $E(R_P) = \mu_1$

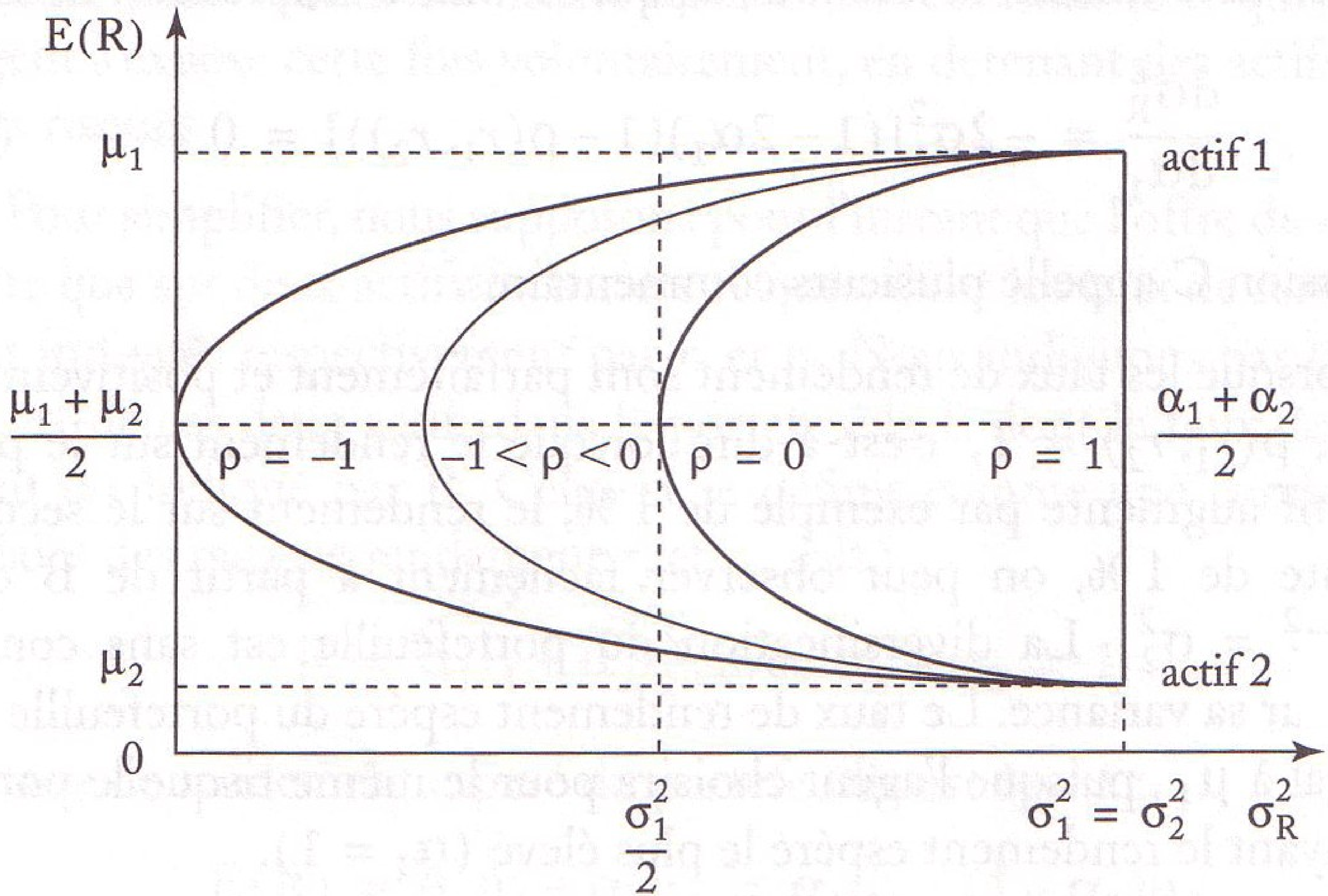
★ $\boxed{\text{si } \rho(r_{1,} r_2) = -1}$ alors $\omega_1 = \frac{1}{2}$

donc $\sigma_P^2 = 0$ et $E(R_P) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$

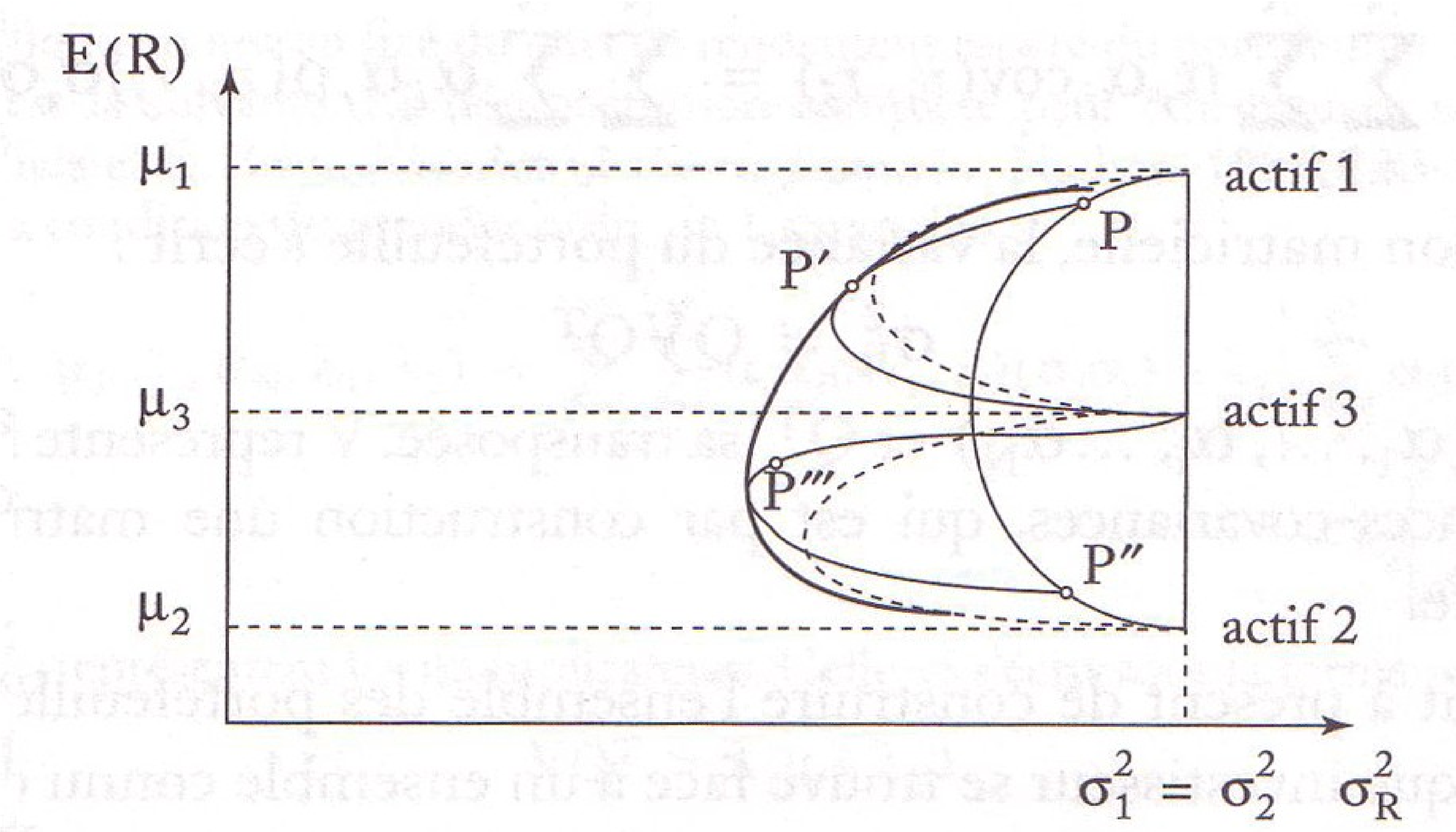
★ $\boxed{\text{si } |\rho(r_{1,} r_2)| \neq 1}$ alors $\omega_1 = \frac{1}{2}$

donc $\sigma_P^2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2(1+\rho) < \sigma_1{}^2$

et $E(R_P) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$


E(R)
μ_1
actif 1
$\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$
$\rho = -1$
$-1 < \rho < 0$
$\rho = 0$
$\rho = 1$
$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
μ_2
actif 2
0
$\frac{\sigma_1^2}{2}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
σ_R^2

Cas de 3 actifs risqués :



Généralisation

- Information commune sur la distribution des rendements (information parfaite) et coûts de transaction nuls

- matrice de covariance des actifs risqués inversible

- Il existe au moins 2 titres de rendements attendus distincts

2 étapes :

- Déterminer les portefeuilles qui minimisent la variance pour un niveau de rentabilité espéré

=> **frontière efficiente**

- Pour chaque investisseur, choisir son portefeuille optimal sur cette frontière en fonction de son degré d'aversion au risque

=> **portefeuille optimal**

Contraintes :

De la forme : $D\,\omega = d$ avec : $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

et : $D \in \mathbb{R}^{m \times N}$

$$\forall\, i \in [\![1, N]\!] \quad w_i \geqslant 0$$

Exemple : ${}^t\mathbf{1}\,\omega = 1$

Cas monopériodique :

$$\text{richesse initiale} \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^{i=N} n_i P_i$$

$$\text{richesse en 1} \quad \tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{i=N} n_i \tilde{P}_i$$

P_i prix de l'actif i en 0

$\tilde{P}_i$ prix de l'actif i en 1 $(v.a.)$

en posant : $r_i := \dfrac{\tilde{P}_i - P_i}{P_i}$ (rendement du titre i)

et : Λ la matrice de covariance des rendements

on obtient : $\boxed{R_P = {}^t\omega\,\tilde{r}}$

et : $\boxed{\sigma_P^2 = {}^t\omega\,\Lambda\,\omega}$

En résumé :

$$\text{on minimise} \qquad \sigma_P^2 = Var(R_P) = {}^t\omega \, \Lambda \, \omega$$

$$\text{sous la contrainte} \qquad D\omega = d$$

On obtient :

$$\begin{cases} \omega = \Lambda^{-1} \, {}^tD \, (D \, \Lambda^{-1} \, {}^tD)^{-1} d \\ \sigma_P^2 = {}^td \, (D \, \Lambda^{-1} \, {}^tD)^{-1} d \end{cases}$$

Hypothèses simplificatrices :

$$D = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{1} \\ {}^t\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad <=> \quad \boxed{{}^t\omega\,\mathbf{1} = 1}$$

Rappel :

$$R_P = {}^t\omega\,\tilde{R}$$

en posant : $\forall i \in \mathbb{N}_N^* \; \mu_i := E(R_i)$

on fixe $\bar{\mu}$ tel que $\boxed{\bar{\mu} = {}^t\omega\,\mu}$

On obtient :

$$\sigma_P^2 = (1, \bar{\mu}) \begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

avec :

$$a = {}^t\mu \, \Lambda^{-1} \mu \quad b = {}^t\mu \, \Lambda^{-1} \mathbf{1}$$

$$\text{et} \qquad c = {}^t\mathbf{1} \, \Lambda^{-1} \mathbf{1}$$

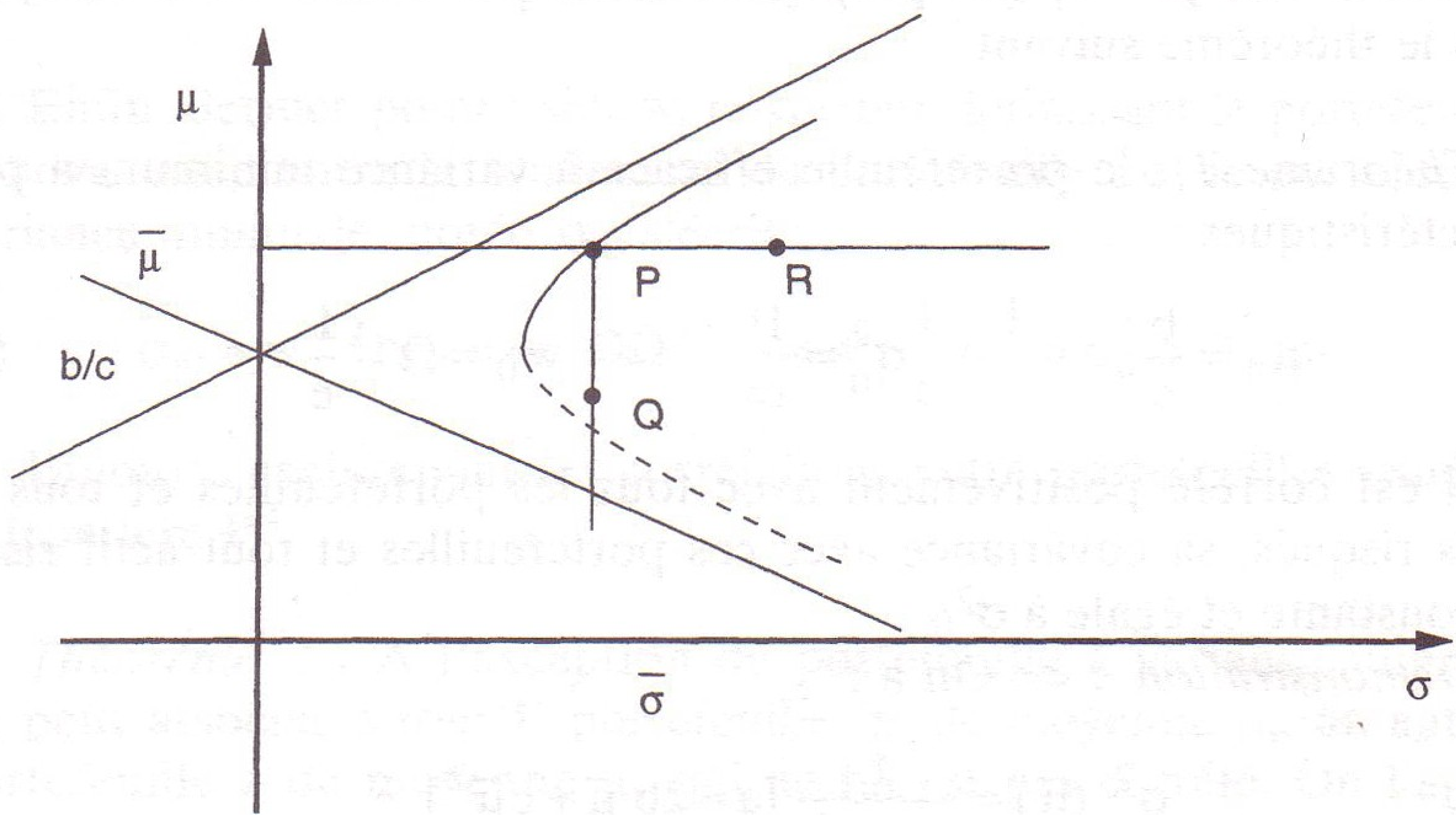
Après calculs :

$$\boxed{c\,\sigma_P^2 - \frac{c^2}{ac-b^2}\left(\bar{\mu} - \frac{b}{c}\right)^2 = 1}$$

$$\text{hyperbole de centre } \left(\frac{b}{c}, 0\right)$$

$$\text{et d'asymptotes } \mu = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{ac-b^2}{c}}\,\sigma$$

Graphique 1. – *La frontière efficace*



Rappel :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = \Lambda^{-1}\,{}^t D \left(D\,\Lambda^{-1}\,{}^t D \right)^{-1} d \\ D = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{1} \\ {}^t\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\boxed{\omega^* = \Lambda^{-1} (\mathbf{1}, \mu) \begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}}$$

Application

Propriétés du portefeuille à variance minimale :

Théorème : Le portefeuille à variance minimale a pour caractéristiques :

$$\mu_0 = \frac{b}{c} \qquad \sigma_0^2 = \frac{1}{c} \qquad \omega_0 = \Lambda^{-1}\frac{\mathbf{1}}{c}$$

Il est corrélé positivement avec tous les portefeuilles et tous les actifs risqués.

Propriétés du portefeuille à variance minimale :

<u>Théorème :</u> Tous les portefeuilles de la partie haute de la frontière efficiente sont corrélés positivement

Propriétés des portefeuilles efficaces :

Théorème (de Black) : Tout portefeuille efficient peut s'écrire comme combinaison linéaire de 2 portefeuilles efficients quelconques, distincts

Corollaire : Toute combinaison convexe de portefeuilles de la frontière efficiente est un portefeuille efficient

Propriétés des portefeuilles efficaces :

<u>Théorème (efficience et linéarité) :</u> Un portefeuille P est efficace ssi la covariance entre ce portefeuille et un actif risqué est une fonction affine du vecteur des rendements espérés.

autre formulation : $\exists \beta_P \geq 0 \ , \ \alpha_P \in \mathbb{R} \ /$

$$\forall i \in \mathbb{N}_N \quad cov(\tilde{r}_i, R_P) = \beta_P E(\tilde{r}_i) + \alpha_P$$

Cas où il existe un actif sans risque

- actif de rendement certain r_f et de risque nul indicé par 0

- stabilité

- comportement de type Markowitz (riscophobe + insatiable)

On a :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=N} \omega_i = 1 \\ \displaystyle\tilde{R}_P{}' = \omega_0 r_f + \sum_{i=1}^{i=N} \omega_i \tilde{r}_i \end{cases}$$

On pose : x la proportion de la fortune initiale investie dans les actifs risqués => $\omega_0 + x = 1$

On définit : la rentabilité moyenne des N titres risqués

$$\tilde{R}_m := \frac{\tilde{R}_P}{x}$$

On obtient : $$\boxed{\tilde{R}_P{}' = (1-x)\, r_f + x\, \tilde{R}_m}$$

On en déduit le problème d'optimisation :

$$Min[\sigma^2(\tilde{R}_P{}')] = Min[x^2\sigma^2(\tilde{R}_m)]$$

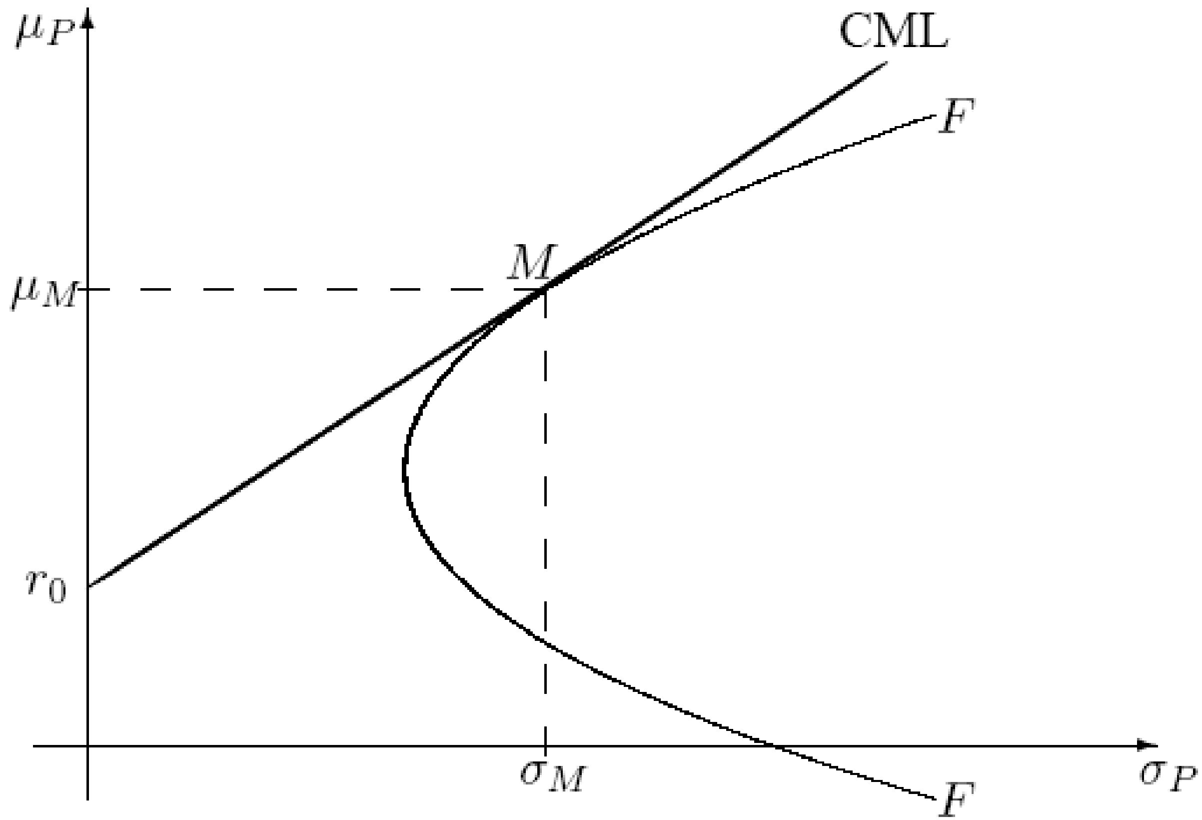
$$\text{sc} \quad \begin{cases} E(\tilde{R}_P{}') = xE(\tilde{R}_m) + (1-x)\, r_f = \mu' \\ {}^t\mathbf{1}\,\omega' = 1 \end{cases}$$

Après calculs, le problème devient :

$$\begin{cases} Min\,[x^2\sigma^2(\tilde{R}_m)] = \dfrac{(\mu' - r_f)^2}{(Max(\tilde{\lambda}))^2} \\ \text{avec } \tilde{\lambda} = \dfrac{E(\tilde{R}_m) - r_f}{\sigma(\tilde{R}_m)} \end{cases}$$

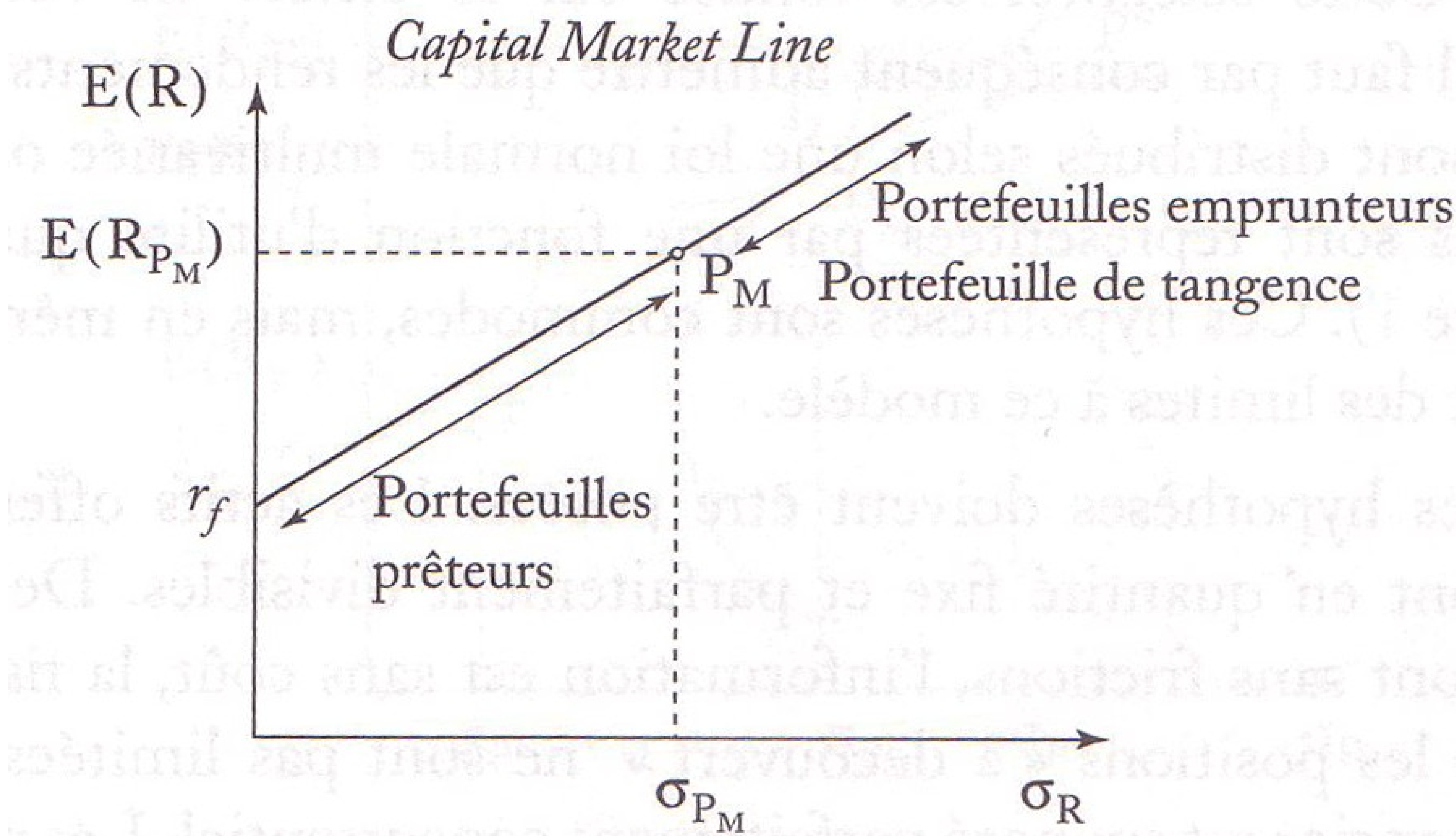
d'où :

$$\boxed{\mu' - r_f = \left|Max(\tilde{\lambda})\right| \tilde{\sigma}_P}$$

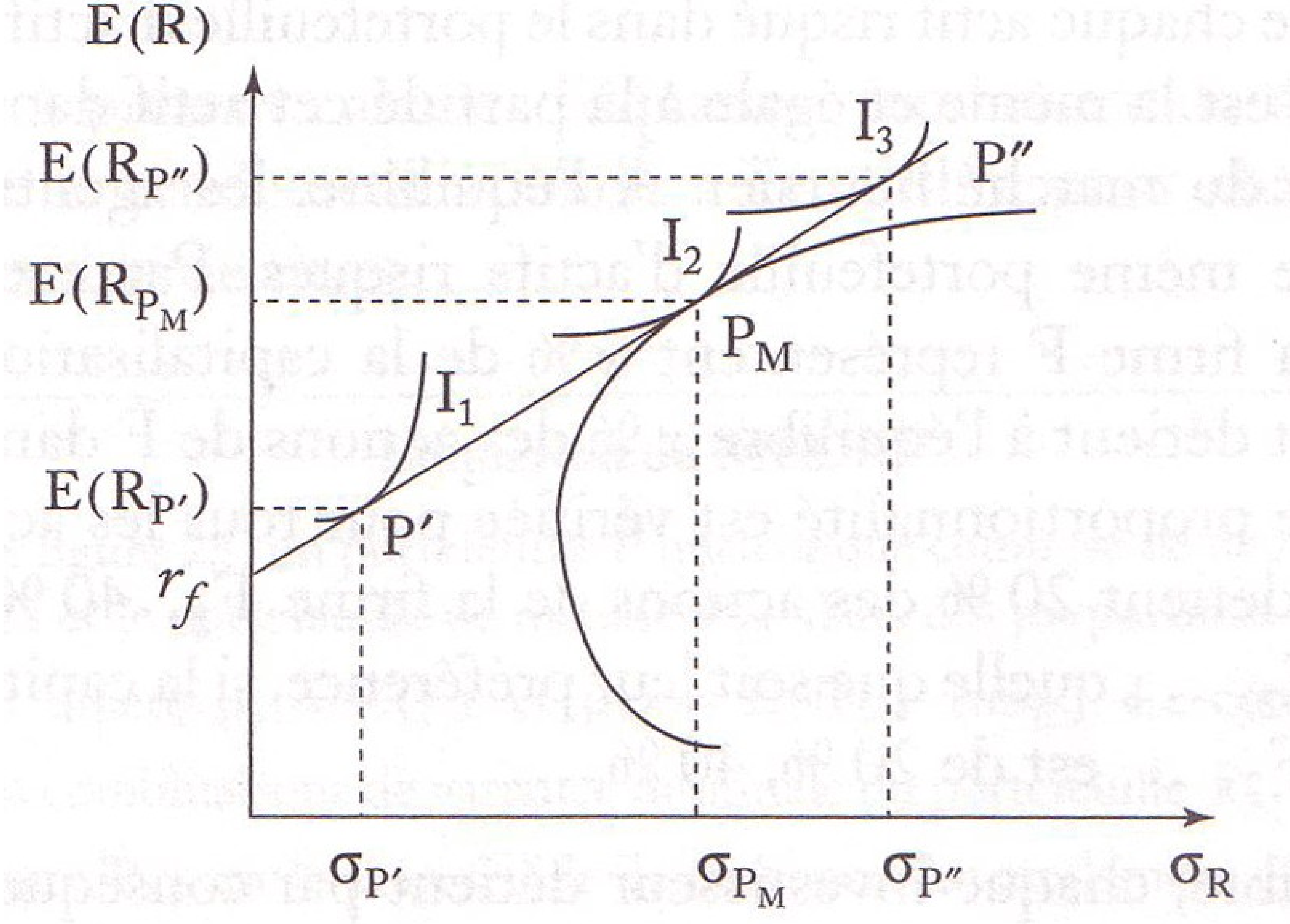


The capital market line

$$E(\tilde{R}_P) = \frac{E(\tilde{R}_{PM}) - r_f}{\sigma_{\tilde{PM}}} \tilde{\sigma}_P + r_f$$



$$\text{Rappel :} \quad \sigma(\tilde{R}'_P) = x\,\sigma(\tilde{R}_m)$$



Rappel : $E[u(\omega_f)] = cste$

Définition (coefficient de Sharpe) :

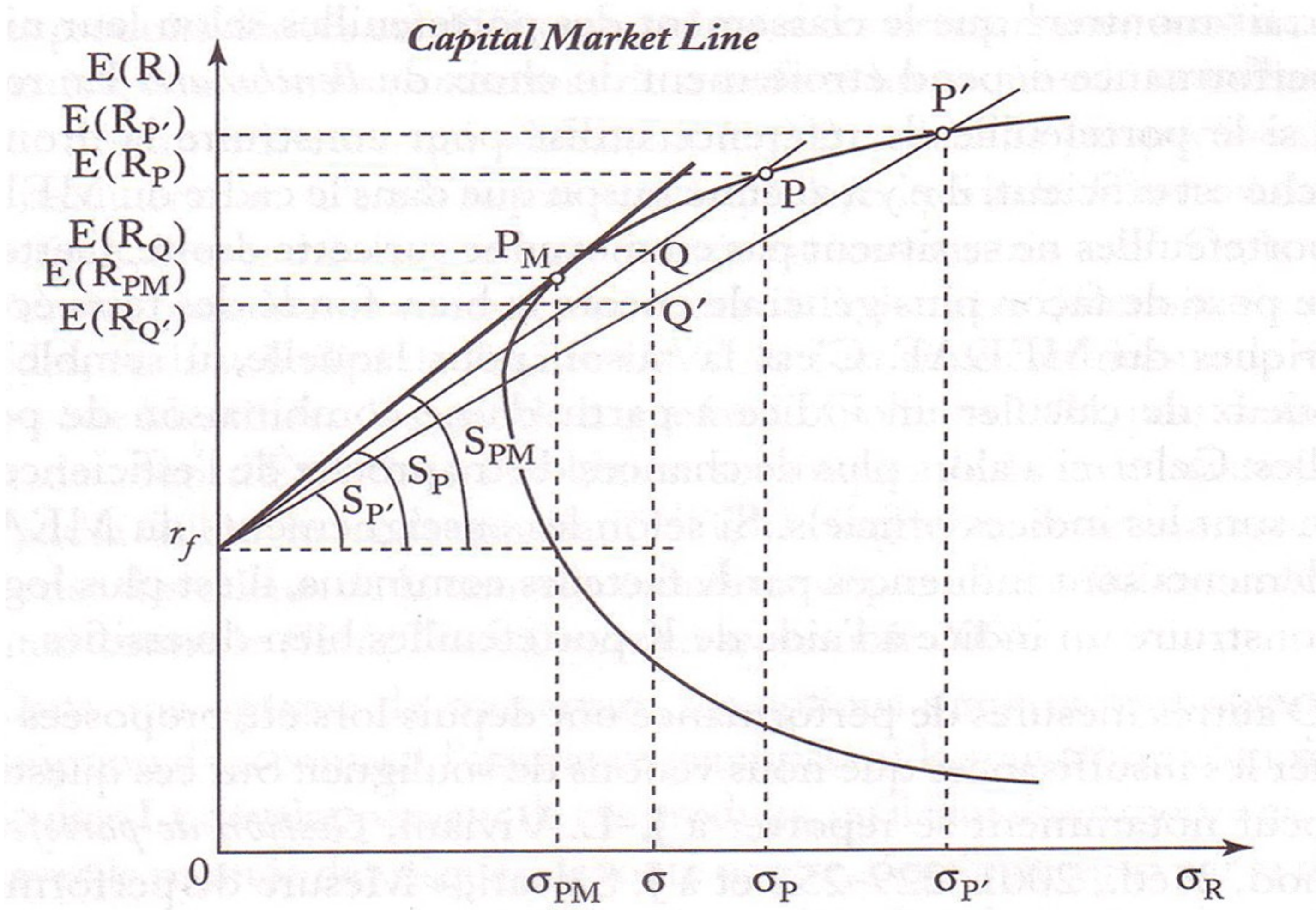
$$\tilde{\lambda}_P' := \frac{E(\tilde{R}_P') - r_f}{\sigma(\tilde{R}_P')}$$

Propriété :

$$E(\tilde{R}_m) = \frac{E(\tilde{R}_P') - r_f}{\sigma(\tilde{R}_P')} \sigma(\tilde{R}_m) + r_f$$

$$= \tilde{\lambda}_P \sigma(\tilde{R}_m) + r_f$$

Mesure de la performance :



On peut également montrer que :

$$\omega_0^{\,*} = \frac{\langle \Lambda^{-1}\pi \,|\, \mu - \bar{\mu}\,\mathbf{1} \rangle}{\langle \Lambda^{-1}\pi \,|\, \pi \rangle}$$

$$\text{et} \quad \omega^{*} = \frac{\bar{\mu} - r_f}{\langle \Lambda^{-1}\pi \,|\, \pi \rangle}\,\Lambda^{-1}\pi$$

$$\text{avec} \quad \pi := \mu - r_f\,\mathbf{1}$$

Construction d’un critère global

Définition (gain certain équivalent) :

$$GCE := \mu_w - \lambda\,\sigma$$

avec : μ_w est la richesse finale espérée

σ^2 la variance de la richesse finale

$\lambda \geq 0$ coefficient lié à l'aversion au risque

Application numérique :

$$\text{Minimiser } \lambda\left(\langle x|\Lambda x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} - \omega - \langle x|\mu\rangle$$
$$\text{sc } {}^t x\,\mathbf{1} = \omega$$

$$E = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2,5 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \end{pmatrix} \quad , \quad \omega = 10$$

λ	$f(x)$	x
0	-40	$0,0,10$
$0,5$	$-33,87$	$0,0,10$
1	$-27,95$	$0,0,10$
$1,5$	$-21,63$	$0,0,10$
2	$-15,5$	$0,0,10$
$2,5$	$-9,38$	$0,0,10$
3	$-3,26$	$0,0,10$
3	$-3,76$	$10,0,0$
4	$3,28$	$10,0,0$
5	$0,35$	$10,0,0$

Définition (prime de rendement) :

$$\theta := \frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$$

Excès du rendement sur le taux sans risque
par unité de risque

Approche par théorie du l'utilité

But:

Maximiser

$$E\left(u\left[\omega\left(1+\langle w|\tilde{r}\rangle\right)+\omega_0 r_f\right]\right)$$

$$s.c. \langle \omega|\mathbf{1}\rangle = 1-\omega_0$$

Conditions du premier ordre :

$$E\left(u'\left[\omega\left(1+\langle w|\tilde{r}\rangle\right)+\omega_0 r_f\right]\omega\tilde{r}\right)-\lambda=0$$

$$E\left(u'\left[\omega\left(1+\langle w|\tilde{r}\rangle\right)+\omega_0 r_f\right]\omega r_f\right)-\lambda=0$$

Approche par théorie du l'utilité

Résolution explicite avec :

- **Fonction d'utilité quadratique**
- **Portefeuille logarithmique**
- **Portefeuille peu risqué**

Fonction d'utilité quadratique :

$$U(\omega)=\omega-a\omega^2$$

Coefficient d'aversion relatif risque :

(ARR) $$\gamma(\omega)=-\omega\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}$$

Conclusion :

$$\gamma_{sq}(\omega)=-\omega\frac{-2\mathrm{a}}{1-2\mathrm{a}\,\omega}=[\frac{1}{2\mathrm{a}\,\omega}-1]^{-1}$$

Théorème : Si les rendements sont du second ordre et si les opérateurs utilisent des fonctions d'utilité quadratiques, alors le portefeuille optimal a pour composition :

$$w^q = \frac{\left(\frac{1}{2a\,\omega} - 1\right)}{\langle \Lambda^{-1}\pi | \pi \rangle + 1} \Lambda^{-1} \pi$$

$$w_0^q = \frac{\langle \Lambda^{-1}\pi | \mu - \left(\frac{1}{2a\,\omega} - 1\right) \rangle + 1}{\langle \Lambda^{-1}\pi | \pi \rangle + 1}$$

avec $\pi = \mu - r_f \mathbf{1}$

<u>Corollaire</u> : Le portefeuille quadratique est optimal au sens de markowitz.

<u>Théorème</u> : L'approche espérance-variance et l'approche par fonction d'utilité quadratique se correspondent : tout portefeuille optimal au sens de Markowitz l'est au sens de l'utilité quadratique et réciproquement.

De la même façon,

- On trouve des portefeuilles de type Markowitz avec une fonction d'utilité logarithmique :

$$U(\omega) = \log(\omega)$$
$$\gamma_{\log}(\omega) = 1$$

- Dans le cas de portefeuilles peu risqués, les deux approches se correspondent également.

Remarque : Un portefeuille est peu risqué si le rendement espéré est négligeable au second ordre.

Equilibre du marché et Médaf

- **Marché parfait** :
  - pas de restriction sur la vente à découvert
  - pas de taxes et de frais de transaction (ie sans friction)
  - actifs parfaitement divisibles
  - il existe des actifs risqués et sans risque ...

- Fonctionnement **monopériodique**

- Investisseurs définis au sens de **Markowitz**

- **Information parfaite**

Portefeuille de marché :

<u>Définition :</u> Soit un portefeuille optimal au sens de Markowitz de composition ω^* en actifs risqués, on appelle portefeuille de marché, le portefeuille de composition ω_m en actifs risqués :

$$\omega_m = \frac{\omega^*}{{}^t\omega^* \mathbf{1}}$$

Portefeuille de marché :

<u>Théorème :</u> Le portefeuille de marché est unique; il ne comprend que des actifs risqués. Sa composition et ses caractéristiques statistiques sont définies par:

$$\omega_m = \frac{\Lambda^{-1}\pi}{\langle \Lambda^{-1}\pi | \mathbf{1} \rangle}$$

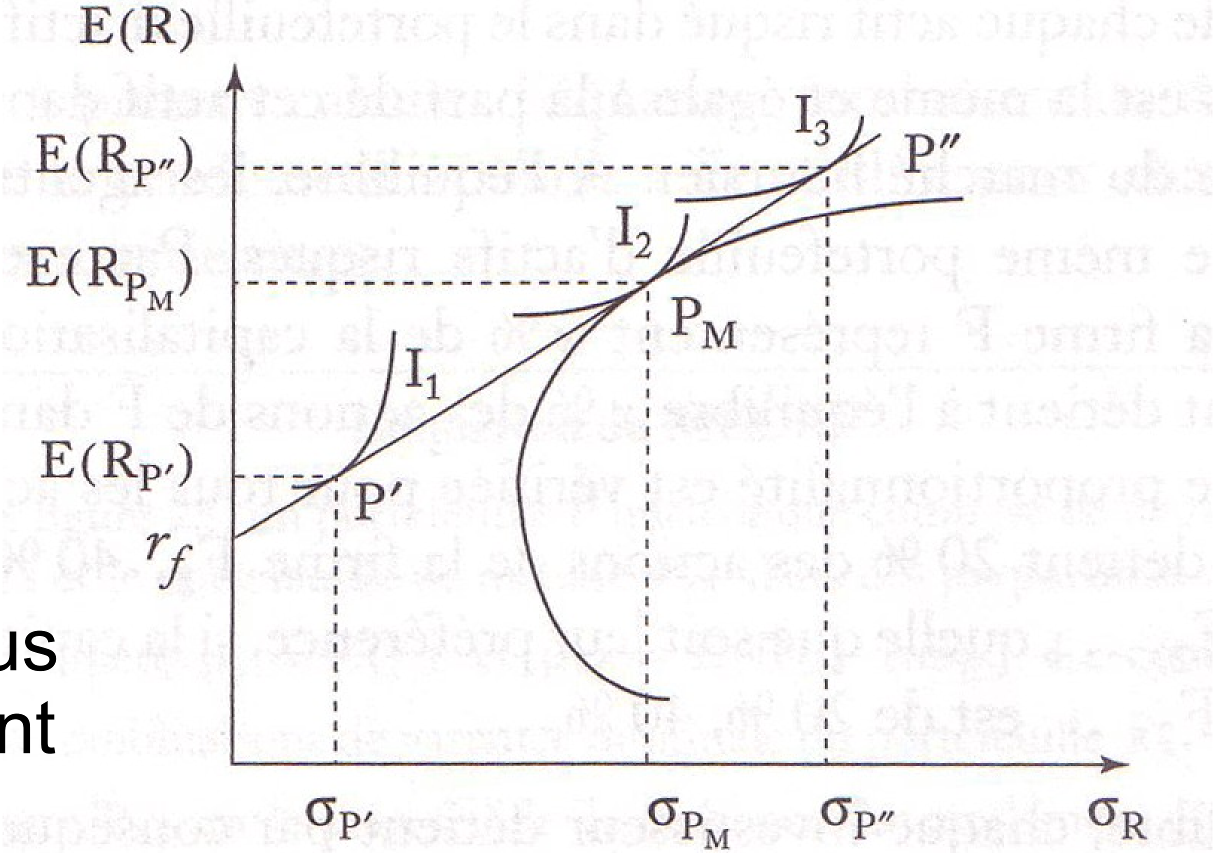
et $$\mu_m = \frac{\langle \Lambda^{-1}\pi | \mu \rangle}{\langle \Lambda^{-1}\pi | \mathbf{1} \rangle} \qquad \sigma_m{}^2 = \frac{\langle \Lambda^{-1}\pi | \pi \rangle}{(\langle \Lambda^{-1}\pi | \mathbf{1} \rangle)^2}$$

Théorème :Le portefeuille de marché est optimal au sens de Markowitz

Théorème (de Markowitz-Tobin) : Les agents sont indifférents à détenir un portefeuille de composition ω^* en actifs risqués ou un portefeuille composé de 2 fonds :

- 1er fonds = le portefeuille de marché,
- 2eme fonds = actif sans risque

Relation fondamentale du Médaf



Rappels : à l'équilibre, tous les investisseurs possèdent le même portefeuille <u>d'actifs risqués</u>

Relation fondamentale du Médaf

Soit un portefeuille P constitué de 2 portefeuilles risqués :

- un actif i en proportion ω_i

- le portefeuille du marché en proportion $1-\omega_i$

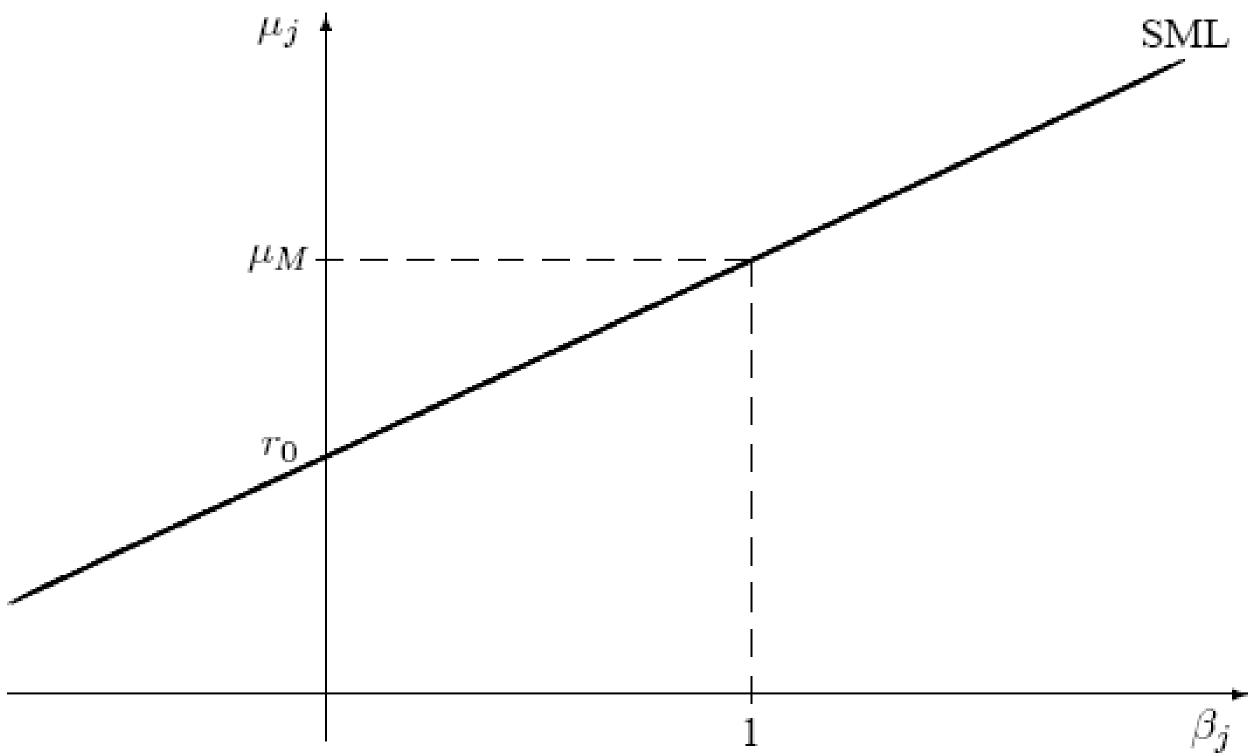
On montre que :

$$\boxed{\mu_i = r_f + \beta_i [\mu_m - r_f]}$$

avec :

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{{\sigma_m}^2}$$

Droite du marché des titres



The security market line

Evaluation à l'équilibre

<u>Théorème (d'équilibre) :</u> Sous les hypothèses précédentes, il existe une unique valeur d'équilibre du marché pour chaque firme et donc un prix d'équilibre pour chaque titre

$$\boxed{S_i = \frac{E(\tilde{S}_i) - \lambda_m cov(\tilde{S}_i, r_m)}{1 + r_f}}$$

avec $\lambda_m = \dfrac{\tilde{\mu}_m - r_f}{\tilde{\sigma}_m^{\,2}}$

Modèles de marché

- Modèle à un seul facteur :

$$\boxed{r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \epsilon_i}$$

avec : $\epsilon_i \perp \epsilon_j$ et $cov(\epsilon_i , r_m) = 0$

$$\boxed{\beta_P = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \beta_i}$$