EDP, Options avec barrières

Exercice 1 **Schémas implicite-explicite**
On considère la valorisation d'options vanille de payoff ϕ pour un actif sous-jacent suivant la dynamique $dS_t = S_t(\mu(t,S_t)dt + \sigma(t,S_t)dB_t)$ sous la loi historique P.
On a alors $V_t = E_Q\left[e^{-r(T-t)}\phi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$ où Q est la probabilité risque neutre.

a) Montrer que $V_t = v(t,S_t)$ où v est solution de l'équation aux dérivées partielles avec condition terminale

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2x^2v''_{xx}(t,x) + rxv'_x(t,x) + v'_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \\ v(T,x) = \phi(x) \end{cases}$$

b) On effectue le changement de variables $y = \ln(x)$ et $u(t,y) = e^{r(T-t)}v(t,x)$. Montrer que y est solution de l'équation aux dérivées partielles avec condition terminale

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma(t,e^y)^2u''_{yy}(t,y) + (r - \frac{1}{2}\sigma(t,e^y)^2)u'_y(t,y) + u'_t(t,y) = 0 \\ u(T,y) = \phi(e^y) \end{cases}$$

c) On cherche maintenant à évaluer la fonction u (et donc v) numériquement dans le cas d'un put européen de prix d'exercice K.
En considérant une grille régulière en temps $(t_n = n\tau)_{0\le n\le N}$ avec $\tau = \frac{T}{N}$ et une grille régulière en espace $(y_i = -R+ih)_{0\le i\le M+1}$ avec $h = \frac{2R}{M+1}$, en considérant $u_{n,i}$ l'approximation numérique de $u(t_n,y_i)$, montrer que le schéma explicite peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1,i}-u_{n,i}}{\tau} = -\frac{1}{2}\sigma^2_{n+1,i}\frac{u_{n+1,i+1}-2u_{n+1,i}+u_{n+1,i-1}}{h^2} + \beta_{n+1,i}\frac{u_{n+1,i+1}-u_{n+1,i-1}}{2h}, \ i \in \{1,\dots,M\} \\ u_{N,i} = (K - e^{-R+ih})_+, \ i \in \{0,\dots,M+1\} \\ u_{n,0} = L_1 \\ u_{n,M+1} = L_2, \ n \in \{0,\dots,N-1\} \end{cases}$$

où l'on explicitera les coefficients $\sigma_{n+1,i}$, $\beta_{n+1,i}$ et les conditions aux limites L_1 et L_2.

d) Ecrire une fonction qui à 3 vecteurs de dimension $p-1$, p et $p-1$ renvoie la matrice trigonale ayant ces vecteurs respectivement sur la sous-diagonale, diagonale et sur-diagonale.

e) En déduire une fonction de paramètres N,M,R,T,r,K et qui renvoie la matrice $(u_{n-1,i-1})_{1\le n\le N+1, 1\le i\le M+2}$. On considèrera les cas $\sigma = 0.3$ et $\sigma(t,x) = \frac{0.3}{1+(x-1)^2}$.
Dans le schéma explicite, comment choisir N et M pour avoir stabilité du schéma ?
Quel est le principal défaut dont souffre cette fonction ?

f) Ecrire une fonction de paramètres k,N,M,R,T,r et K renvoyant le vecteur $(u_{k,i-1})_{\{1\le i\le M+2\}}$ de manière à régler le problème évoqué dans e).

g) Tracer les graphs de $S_0 \mapsto V_0$ obtenus (on pourra comparer dans le cas $\sigma = 0.3$ avec le graph théorique). On pourra considérer pour les applications numériques que $r = 0.05$, $T = 1$, $K = 1$ et $S_0 \in]0,2]$.

h*) Ecrire le schéma implicite et le résoudre.

Exercice 2 **Options lookback, barrière**
On cherche dans cet exercice à évaluer par Monte-Carlo, le prix d'options dépendant de la trajectoire du sous-jacent.

A] Préliminaires
On considérera pour commencer que le sous-jacent suit l'équation d'évolution

$$S_t = S_0 + \int_0^t rS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

avec r et σ constants.

a) Ecrire une fonction qui simule exactement le vecteur $(S_T, \sup_{[0,T]} S_t)$.

[On pourra utiliser le résultat suivant : si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$, alors pour $a \geq x \wedge b$,

$$P(\sup_{[0,T]} X_s \leq a | X_T = b) = 1 - \exp\left(-\frac{2}{T}\frac{(a-b)(a-x)}{\sigma^2}\right)$$]

b) En déduire une première fonction calculant la valeur approchée obtenue par Monte-Carlo d'une option lookback de payoff $\left(\sup_{[0,T]} S_t - K\right)_+$.

c) Tracer le graph de l'intervalle de confiance obtenu en fonction du nombre de simulations choisi.

d) Reprendre b) et c) pour une option barrière $1_{\{\tau > T\}}(S_T - K)_+$ où $\tau = \inf\{t > 0,\ S_t > U\}$.

e) Comment choisir le nombre de simulations si l'on souhaite observer les biais des méthodes d'approximation qui suivront ?

B] Option lookback

a) Ecrire une fonction de paramètres $N,\ h,\ T,\ r,\ \sigma$ et S_0 et qui retourne N trajectoires de S sur $[0, T]$ avec un pas h en temps d'abord par un schéma d'Euler sur S puis par un schéma d'Euler sur $\ln S$.

b) En déduire une seconde fonction de paramètres $N,\ h,\ T,\ r,\ \sigma$ et S_0 et qui retourne la valeur d'une option lookback de payoff $\left(\sup_{[0,T]} S_t - K\right)_+$ par un schéma d'Euler sur S.

c) Quels sont les inconvénients de cette première fonction ?

d) Ecrire une troisième fonction de paramètres $N,\ h,\ T,\ r,\ \sigma,\ K$ et S_0 qui retourne la valeur d'une option lookback de payoff $\left(\sup_{[0,T]} S_t - K\right)_+$, mais qui ne nécessite pas de stocker toutes les trajectoires de S.

e) Ecrire une quatrième fonction effectuant la même action que la précédente mais cette fois grâce à un schéma d'Euler sur S par ponts browniens.

f) Pour un nombre de simulations choisi en A)e), tracer le graph des fonctions obtenues au d) et e) en fonction du nombre d'intervalles de discrétisation (pris entre 1 et 50). On prendra les valeurs $S_0 = 1000,\ T = 1,\ r = 0.05,\ \sigma = 0.3,\ K = 900$.

g) Tout reprendre avec cette fois

$$\sigma(x) = \frac{0.3}{1 + (x - S_0)^2}$$

B] Option barrière

On s'intéresse ici à une option barrière dont le payoff est de la forme $1_{\tau > T}(S_T - K)_+$ où $\tau = \inf\{t > 0,\ S_t > U\}$ et l'actif sous-jacent suit l'évolution du A] avec r et σ constants.

a) Ecrire une fonction de paramètres $N,\ h,\ T,\ r,\ \sigma$ et S_0 et qui retourne la valeur de l'option pour un schéma classique puis un schéma avec ponts browniens.

b) Reprendre a), en utilisant cette fois la méthode de correction du biais par décalage de barrière.

On rappelle que

$$E\left[1_{\{\forall t_i \leq T, S_{t_i} < Ue^{-C_0 \sigma \sqrt{h}}\}} f(S_T)\right] = E\left[1_{\{\forall t \leq T, S_t < U\}} f(S_T)\right] + o(\sqrt{h})$$

où $C_0 = \frac{-\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} = 0.5823....$

On prendra $U = 1200$

Quelques résultats de vérification

Exercice 1
Question c

- Cas $\sigma = 0.3$
  Pour $N = 5, M = 6, R = 4, r = 0.05, T = 1, K = 1.2$,

$$U = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.1397402 & 1.0098572 & 0.6248731 & 0.0198071 & 0.0002565 & 0.0000017 & 0 \\ 1.2 & 1.1402962 & 1.0118496 & 0.6268654 & 0.0159809 & 0.0001555 & 0.0000007 & 0 \\ 1.2 & 1.1408451 & 1.013851 & 0.6289013 & 0.0120886 & 0.0000785 & 0.0000002 & 0 \\ 1.2 & 1.1413868 & 1.0158614 & 0.6309820 & 0.0081286 & 0.0000265 & 0 & 0 \\ 1.2 & 1.1419209 & 1.0178806 & 0.6331085 & 0.0040996 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1816844 & 1.1425674 & 1.0199077 & 0.6352819 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Pour $N = 4, M = 5, R = 8, r = 0.01, T = 2, K = 2$,

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1.9953229 & 1.9325969 & 1.0242431 & 0.0257721 & 0.0002482 & 0 \\ 2 & 1.9952851 & 1.9320825 & 1.018236 & 0.0193316 & 0.0001244 & 0 \\ 2 & 1.995247 & 1.9315643 & 1.0121933 & 0.0128892 & 0.0000415 & 0 \\ 2 & 1.9952086 & 1.9310423 & 1.0061147 & 0.0064453 & 0 & 0 \\ 1.9996645 & 1.9951721 & 1.9305165 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cas $\sigma(t,x) = \frac{0.3}{1+(x-1)^2}$
  Pour $N = 5, M = 6, R = 4, r = 0.05, T = 1, K = 1.2$,

$$U = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.1387077 & 1.0073598 & 0.6025488 & 0.0100848 & -0.0000023 & 1.025E-08 & 0 \\ 1.2 & 1.1395066 & 1.0099271 & 0.6089430 & 0.0081326 & -0.0000014 & 4.118E-09 & 0 \\ 1.2 & 1.1402948 & 1.0124663 & 0.6154126 & 0.0061485 & -0.0000007 & 1.034E-09 & 0 \\ 1.2 & 1.1410724 & 1.0149765 & 0.6219582 & 0.0041320 & -0.0000002 & 0. & 0 \\ 1.2 & 1.1418395 & 1.0174572 & 0.6285810 & 0.0020826 & 0. & 0. & 0 \\ 1.1816844 & 1.1425674 & 1.0199077 & 0.6352819 & 0. & 0. & 0. & 0 \end{pmatrix}$$

  Pour $N = 4, M = 5, R = 8, r = 0.01, T = 2, K = 2$,

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1.9945938 & 1.923424 & 0.984 & 0.0256256 & -0.0000361 & 0 \\ 2 & 1.9947396 & 1.9251918 & 0.9879561 & 0.0192579 & -0.0000181 & 0 \\ 2 & 1.9948845 & 1.9269631 & 0.9919414 & 0.0128646 & -0.0000060 & 0 \\ 2 & 1.9950286 & 1.9287381 & 0.9959559 & 0.0064453 & 0 & 0 \\ 1.9996645 & 1.9951721 & 1.9305165 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Question a
On peut contrôler le simulateur avec la fonction de répartition du couple

$$P(S_T \leq s, \sup_{u \leq T} S_u \leq m) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{m}{S_0})-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu \ln(\frac{m}{S_0})}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-\ln(\frac{m}{S_0})-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), & s \geq S_0, m \in [S_0, s] \\ 0, \qquad m < S_0 \\ \Phi\left(\frac{\ln(\frac{s}{S_0})-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu \ln(\frac{m}{S_0})}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{s}{S_0})-2\ln(\frac{m}{S_0})-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), & m \geq \max(s, S_0) \end{cases}$$

et $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$

Question b
Quelques valeurs théoriques de l'option lookback
$S_0 = 100,\ K = 90,\ U = 120,\ r = 0.05,\ \sigma = 0.3,\ T = 1$ et alors $V_0 = 37.690083$
$S_0 = 200,\ K = 90,\ U = 250,\ r = 0.025,\ \sigma = 0.1,\ T = 2$ et alors $V_0 = 132.97562$

Question d
On pourra utiliser à sa convenance, l'article **maxbrownien.pdf** situé dans le répertoire habituel