

# Gestion des risques actif - passif

## Etude de l'article "Credit Risk Concentrations under Stress"\*

de : G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz, G. Stahl

3 mars 2007

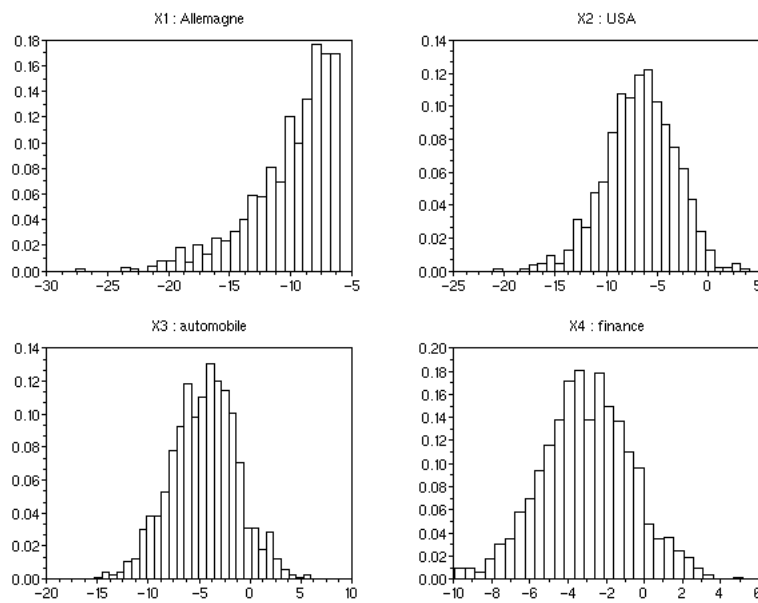


illustration de facteurs systématiques corrélés en situation de crise

Bourges Mathieu  
Sibilleau Michaël  
Master SAF 2 - Institut de science financière et d'assurances (Lyon)

---

\*Concentrations des risques de crédit en situation extrême

## Introduction

Ce rapport procède d'une analyse critique de l'article *Credit Risk Concentrations Under Stress* rédigé en octobre 2005 par G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl. Les deux premiers auteurs travaillent à la Deutsche Bank et les deux suivants à la Federal Financial Supervisory Authority (Bonn - Allemagne)

Sur près de 20 pages, l'article présente une méthodologie de simulation de crise (*stress testing*) prenant en compte le risque de concentration d'un portefeuille de crédit. Pour ce faire, les auteurs proposent un modèle multifactoriel intégrant des dépendances entre les données externes macro économiques. Ils formalisent dans un second temps la mesure de concentration au travers d'un indicateur (le facteur de concentration).

Nous avons téléchargé cet article sur le site de google scholar. S'il n'est pour le moment pas cité, le sujet a retenu notre attention et nous a conduit à reproduire les principaux résultats présentés par simulation<sup>1</sup>. Ceci nous a d'ailleurs permis de mieux comprendre les approches, les contraintes et les objectifs des auteurs.

Après avoir placé l'article dans son contexte, nous nous proposons de présenter ses principaux objectifs, de procéder à une analyse critique et enfin de livrer les résultats de quelques travaux réalisés de manière extensive.

Pour effectuer ce travail, nous nous sommes appuyés sur certains articles dont nous donnons les références en fin de rapport.

## 1 L'article dans son contexte

Dans leurs propos liminaires, G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl examinent l'approche IRB des accords de Bâle et critiquent deux des hypothèses qui y sont faites : l'infini granularité du portefeuille et le recours à un modèle monofactoriel.

Il convient donc de bien préciser ce que sont les recommandations de Bâle, ce qu'on entend par risque de concentration de crédit pour ensuite présenter le modèle de Gordy à l'origine des hypothèses formulées.

### 1.1 Les recommandations de Bâle relatives au risque de crédit

Les premières réglementations du comité de Bâle mises en place à la fin des années 80 ont fait l'objet de nombreuses critiques, considérant qu'il n'était pas tenu compte du portefeuille de risques d'une banque. Ces critiques ont conduit le comité à proposer de nouvelles réglementations permettant l'utilisation d'outils de contrôle internes par les établissements bancaires. Car il faut bien reconnaître que les banques ont leurs propres spécificités et qu'elles manipulent des produits de couverture dont la valorisation reste mathématiquement complexe et non généralisable. Imposer un système unique aurait été trop restrictif.

Pour mesurer le risque de crédit, le nouvel accord prévoit deux approches de notation interne : l'approche IRB<sup>2</sup> Foundation et IRB Avancée. Dans le premier cas, la banque estime la probabilité de défaut du preneur de crédit (PD) alors que la probabilité de perte (*Loss Given Default* - LGD) et l'exposition en cas de défaut (EAD), de même que la maturité restante sont fournis par les autorités de tutelle. Dans l'approche IRB Avancée, c'est la banque elle-même qui estime l'ensemble de ces paramètres.

Le texte de Bâle II met fortement en évidence l'importance des estimations des paramètres PD, LGD et EAD et demande qu'il soit établi des simulations de validation (*back testing*) et de crise (*stress testing*). Ces deux classes de simulations sont complémentaires : la première est tournée vers le passé et consiste à calibrer un modèle sur des données empiriques tandis que la seconde consiste à imaginer des scénarii de catastrophes financières futures. A l'évidence, l'inconvénient réside dans l'arbitraire des hypothèses faites.

<sup>1</sup>les simulations ont été réalisées en Scilab, les codes sources figurent en annexe

<sup>2</sup>*Internal Rating Based*

## 1.2 Le risque de concentration de crédit

Parallèlement au risque conjoncturel qui impacte les estimations des PD, LGD et EAD, le pilier II (voir [BIS04], § 770-777) définit le risque de concentration du crédit comme “une exposition unique ou un groupe d’expositions de nature à engendrer des pertes suffisamment importantes [...] pour menacer la solidité d’une banque ou sa capacité à poursuivre ses activités essentielles”. L’article 770 ajoute que “[ces] concentrations de risque constituent sans doute la principale cause des grands problèmes bancaires”.

C’est précisément dans ce contexte que s’inscrit l’article de G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl : les auteurs cherchent à définir une méthodologie de simulations de crise dans le cas le plus général où la banque s’expose à un groupe de contreparties liées (*sector concentration*).

La dépendance dont il est question se rapporte à des corrélations entre des facteurs économiques, géographiques ou capitalistiques. C’est ainsi que, par exemple, une banque régionale spécialisée dans le crédit hypothécaire devrait se voir attribuer une charge de capital supplémentaire par les autorités de tutelle pour ces deux concentrations.

## 1.3 Le modèle de Gordy

Pour comprendre l’approche des auteurs de notre article, il est nécessaire de rappeler en quoi consiste le modèle de Gordy (2002) <sup>3</sup> ainsi que les hypothèses faites sur la structure du portefeuille.

En premier lieu, on suppose que chaque contrepartie  $i$  présente dans le portefeuille de la banque dispose d’une valeur  $V_{i,t}$  de dynamique (modèle de Merton - 1974) :

$$\frac{dV_{i,t}}{V_{i,t}} = \mu_i dt + \sigma_i dB_t = \mu_i dt + \sigma_i \sqrt{dt} Y_{i,t} \quad (1)$$

dans laquelle  $\mu_i$  et  $\sigma_i$  désignent respectivement la tendance et la volatilité et  $Y_{i,t} \sim N(0, 1)$ .

Le défaut d’une contrepartie peut être défini à partir d’un seuil  $V_i^{critique}$  tel que :  $V_{i,t+dt} < V_i^{critique}$ , ce qui donne compte tenu de (1) :

$$Y_{i,t} < \frac{1}{\sigma_i \sqrt{dt}} \times \left[ \frac{V_i^{critique} - V_{i,t}}{V_{i,t}} - \mu_i dt \right] = seuil_i$$

La probabilité de défaut (non conditionnelle) de  $i$  est ( $dt = 1$ ) :  $p_i = \mathbb{P}(Y_i < seuil_i) = N \left[ \frac{\frac{V_i^{critique} - V_{i,t}}{V_{i,t}} - \mu_i}{\sigma_i} \right]$

où  $N$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le défaut est donc caractérisé par :  $Y_i < N^{-1}(p_i)$  (2)

En outre, le modèle de Gordy décompose la variable  $Y_i$  en deux parties<sup>4</sup> :

$$Y_i = \sqrt{\rho_i} X + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i \quad (3)$$

<sup>3</sup>pour plus de détails, voir [VOT05]

<sup>4</sup>voir [VAS02]

où  $X$ ,  $Z_i$  sont des variables aléatoires centrées réduites mutuellement indépendantes et  $\rho_i \in [0, 1]$  (on écrit parfois  $\rho_i = R_i^2$ ).

Le premier membre matérialise l'exposition de la contrepartie à un facteur systématique commun tel qu'un indice macroéconomique. Le second désigne le risque idiosyncratique e.g. le risque spécifique de la contrepartie.

Comme le rappelle [VOT05], la dernière hypothèse faite par Gordy, et qui permet de simplifier le calcul d'un quantile de perte sur le portefeuille, consiste à supposer que le portefeuille est infiniment granulaire (*fine-grained*) à savoir que "tous les engagements sont identiques et que la diversité des tiers est suffisamment importante pour être perçue comme étant presque infinie".

En pratique, cette hypothèse s'applique au cas des portefeuilles présentant une bonne diversification.

Dans leur article, G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl reprochent deux des hypothèses du modèle de Gordy.

En premier lieu, ils relèvent que la sensibilité d'une contrepartie à un seul facteur systématique  $X$  définit une structure de corrélation beaucoup trop simplifiée. Ils indiquent que différents facteurs systématiques, de même que leurs interdépendances, doivent être envisagés pour se rapprocher d'une structure plus réelle.

La seconde critique porte sur l'infini granularité du portefeuille qui ne permet pas de quantifier le risque de concentration.

Selon eux, la volonté de simplifier les modèles s'est accompagnée d'hypothèses trop éloignées de la réalité pour permettre *in fine* de développer des méthodologie de simulation efficaces.

## 2 Objectifs et approches des auteurs

L'ambition des auteurs est de développer une méthode de simulation de crise intégrant le risque de concentration au travers d'un modèle à seuil multifactoriel. Bien plus, ils souhaitent mesurer le risque de concentration en définissant un nouvel indicateur : le *facteur de concentration*.

### 2.1 Présentation du modèle multifactoriel

G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl révisent l'expression de la décomposition de la sensibilité  $Y_i$  formulée en (3) et proposent le modèle suivant :

$$Y_i = \sum_{j=1}^m \phi_{i,j} X_j + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i \quad (4)$$

avec :  $\mathbf{X} = (X_j)_{1 \leq j \leq m}$  un vecteur Gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance - covariance  $\Sigma$  et  $(\phi_{i,j})_{1 \leq j \leq m}$  un vecteur de pondérations tel que  $\forall i, j \phi_{i,j} \in [0, 1]$

$\mathbf{X}$  désigne donc un vecteur dont les composantes sont les  $m$  facteurs systématiques liés entre eux par la matrice  $\Sigma$ . Les coefficients de pondérations  $\phi_{i,j}$  sont choisis selon l'importance relative qu'occupe le facteur  $j$  sur la sensibilité de la contrepartie  $i$ .

Les auteurs illustrent le modèle avec un exemple volontairement simpliste d'un titre BMW :

$$BMW = 0.8 \times X_{\text{Allemagne}} + 0.2 \times X_{\text{USA}} + 0.9 \times X_{\text{secteur auto}} + 0.1 \times X_{\text{finance}} + \text{risque idiosyncratique} \quad (5)$$

On imagine bien que les facteurs, ici des pourcentages de variations d'un indice sectoriel sur une période donnée, sont plus ou moins corrélés : une crise de l'un des facteurs, disons celui de l'Allemagne, doit avoir des

répercussions sur les autres secteurs de manière plus ou moins prononcée (selon le coefficient de corrélation linéaire).

S'agissant d'un modèle à seuil, la crise est matérialisée par un événement du type :  $\left\{ X_{\text{Allemagne}} < F_{X_{\text{Allemagne}}}^{-1}(p) \right\}$ .

En simulant un tel scénario avec comme support l'exemple (5), nous obtenons le graphe 1.

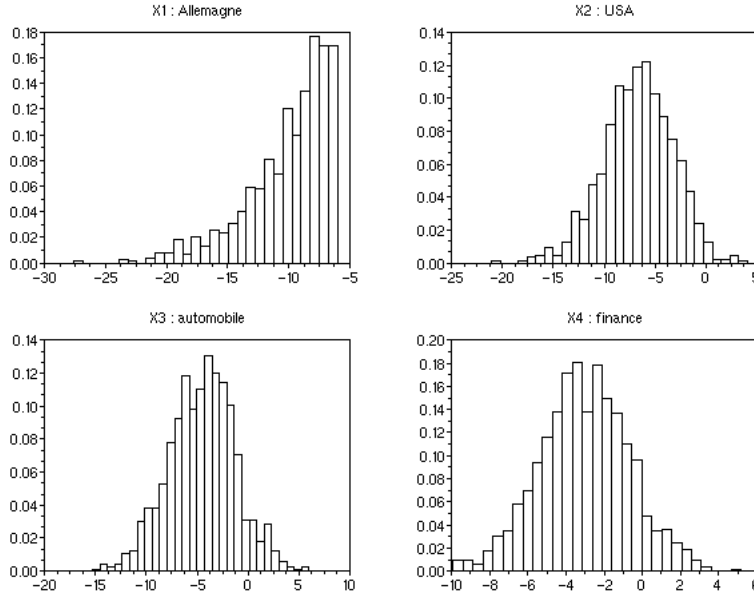


FIG. 1 – illustration de facteurs systématiques corrélés en situation de crise

Une manière de “choquer” l'indicateur de l'Allemagne consiste par exemple à tronquer sa distribution. Cette méthode est brutale mais donne des résultats convaincants : les distributions des autres facteurs se sont déplacées vers la gauche, et de manière plus ou moins prononcée selon leur corrélation avec le facteur allemand.

## 2.2 Application au calcul des pertes espérées du portefeuille

Le modèle multifactoriel peut avoir plusieurs applications, allant de l'estimation de la probabilité de chaque scénario à l'estimation des pertes du portefeuille (essentielle au calcul du capital économique exigible ou encore de la *Value at Risk* - VaR).

La perte du portefeuille est définie par :  $L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{1}_{\{Y_i < N^{-1}(p_i) | \mathbf{X}\}}$  où  $l_i = EAD_i \times LGD_i$  i.e. le produit de l'engagement par la perte prévisionnelle en cas de défaut sur le tiers  $i$  et  $\mathbf{X}$  désigne un vecteur matérialisant le scénario<sup>5</sup>.

La probabilité de pertes conditionnelle sur la  $i$ ème ligne de crédit s'écrit donc :  $\mathbb{P}_i(\mathbf{X}) = \mathbb{P}(Y_i < N^{-1}(p_i) | \mathbf{X})$

soit encore, d'après (4) :  $\mathbb{P}_i(\mathbf{X}) = \mathbb{P}({}^t\phi_i \mathbf{X} + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i < N^{-1}(p_i) | \mathbf{X})$  où  ${}^t\phi_i$  est la matrice ligne des pondérations de la contrepartie  $i$

<sup>5</sup>dans ce modèle, le scénario tient compte de l'ensemble des facteurs externes

$$\text{d'où finalement : } \mathbb{P}_i(\mathbf{X}) = N \left[ \frac{N^{-1}(p_i) - \mathbf{t} \phi \mathbf{X}}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right] \quad (6)$$

En procédant à 10.000 simulations sur 100 lignes de crédit avec  $\dim(\mathbf{X}) = 10$ , nous obtenons le graphe de la figure 2, conforme à celui de l'article<sup>6</sup>.

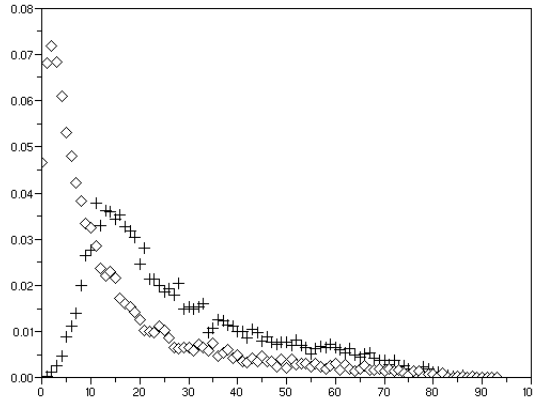


FIG. 2 – résultats de simulations de la distribution de pertes en cas de crise ou non

Les losanges correspondent à la distribution obtenue en situation normale tandis que les croix correspondent à une situation de crise. Il est intéressant de remarquer que le caractère leptokurtique est davantage prononcé en situation de crise. Tout ceci conforte l'intuition car en situation de crise, les pertes agrégées du portefeuille sont plus importantes en probabilité.

*Remarque :* la simulation de crise peut s'effectuer en agissant sur un facteur systématique par une contrainte du type  $\{X_i < F_{X_i}^{-1}(p)\}$  ou de manière plus complexe sur plusieurs facteurs.

### 2.3 Le facteur de concentration

Dans la deuxième partie de leur article, G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl définissent de manière formelle un indicateur de concentration du risque de crédit.

Pour un portefeuille dont la distribution de pertes est  $L$ , le risque de concentration dans le facteur systématique  $X$  est la fonction de  $[0, 1]^2$  à valeurs dans  $[0, 1]$  définie par :

$$FC_X(p, q) := \mathbb{P}(L \geq F_L^{-1}(1 - q) \mid X \leq F_X^{-1}(p))$$

où les probabilités  $p$  et  $q$  désignent respectivement l'intensité de crise et le niveau de confiance de la distribution de pertes.

Cette définition est assez intuitive (et naturelle) et on remarque que si  $X$  et  $L$  sont continues, il est possible d'exprimer le facteur de concentration de la manière suivante :

<sup>6</sup>les auteurs s'appuient sur un exemple de crise dans le secteur de l'automobile (baisse de production de 8% en un an) et observent les pertes du portefeuille. Ils utilisent 75 facteurs systématiques

$$FC_X(p, q) = \frac{C(p, q)}{p} \quad (7)$$

où  $C$  est une copule traduisant la dépendance entre  $X$  et  $L$ .

Les auteurs détaillent certaines propriétés remarquables qui découlent immédiatement de la définition et de la relation (7) :

1. Si  $X$  et  $L$  sont indépendants :  $FC_X(p, q) = q$
2. Si  $X$  et  $L$  sont continues et comonotones : 
$$\begin{cases} FC_X(p, q) = 1 & \text{si } p \leq q \\ FC_X(p, q) = q/p & \text{si } p > q \end{cases}$$
3. Si  $X$  et  $L$  sont continues et contre-comonotones : 
$$\begin{cases} FC_X(p, q) = (p + q - 1)/p & \text{si } p + q \geq 1 \\ FC_X(p, q) = 0 & \text{si } p + q < 1 \end{cases}$$

Ces propriétés remarquables se retrouvent sur la figure 3.

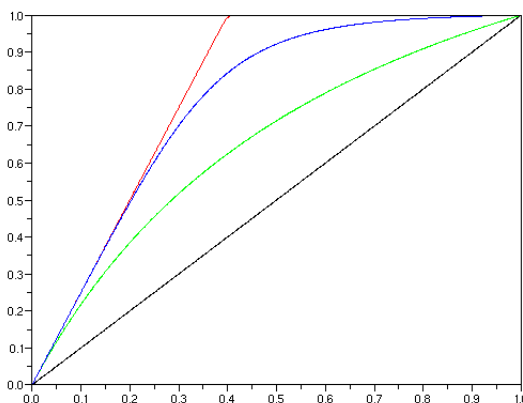


Figure 3: FC en cas d'indépendance (noir), de comonotonie (rouge) et de dépendance des variables  $X$  et  $L$

La figure 3 donne une bonne idée de ce que représente le facteur de concentration. En observant les courbes verte et bleu (dépendance croissante), on constate qu'à un niveau de confiance  $q$  donné, la concavité des courbes conduit à une concentration sur le facteur simulé : ce facteur systématique a une influence non négligeable sur la perte agrégée du portefeuille.

Il existe d'autres interprétations du facteur de concentration que nous pouvons citer à titre d'information :

On peut par exemple écrire :  $FC_X(p, q) \approx \frac{q}{p} \times \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(p) \mid L \geq F_L^{-1}(1 - q))$

et comparer cette expression avec le CTE de la  $i$ ème ligne de crédit où on observe la même probabilité conditionnelle sur la queue de distribution de  $L$  :  $CTE_{1-q}(L_i) = l_i \mathbb{P}(Y_i \leq N^{-1}(p_i) \mid L \geq F_L^{-1}(1 - q))$

On peut également voir le facteur de concentration d'un point de vue asymptotique en rappelant la définition de la *Lower Tail dependence* :

$$\lambda(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(u) \mid L \geq F_X^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} FC_X(u)$$

### 3 Analyse critique

La longue introduction de l'article<sup>7</sup> vise non seulement à présenter la problématique et le plan adopté mais surtout à convaincre le lecteur que le modèle proposé et la méthodologie appliquée généralise les approches habituelles des méthodes IRB. Voilà donc de quoi mettre l'eau à la bouche du lecteur. Mais à grand renfort d'explications contextuelles parfois sans intérêt, les auteurs ont négligé de préciser certaines de leurs hypothèses, ils n'ont pas détaillé leurs applications numériques et, finalement, ne se sont pas montrés suffisamment convaincants sur le fond.

Afin d'appuyer ces critiques, il convient tout naturellement de procéder à une analyse de forme puis de s'intéresser au fond du document.

#### 3.1 Analyse de forme

D'un point de vue formel, l'article pêche par un déséquilibre flagrant dans les explications qui sont fournies : certains concepts sont exagérément détaillés tandis que d'autres ne le sont pas suffisamment.

C'est ainsi que le paragraphe 3 (scénarii de crise) définit des classes de scénarii puis des critères d'efficacité qui leur sont applicables (réalistes, consistants, adaptés et quantifiables) tout en donnant une idée de la méthodologie à appliquer. Cette méthodologie sera d'ailleurs rappelée dans la suite du document, parfois presque dans les mêmes termes, mais sans jamais être suffisamment pragmatique.

Dans un même ordre d'idée, les auteurs font le choix de livrer les définitions de concentration sur une contrepartie (*name concentration*) ou sur un secteur (*sector concentration*) que le lecteur intéressé peut déduire de la lecture du pilier II des accords de Bâle (voir [BIS04] - § 773). Dans le paragraphe 6, ils apportent des développements relatifs à ces mêmes accords mais leurs explications peuvent apparaître superflues ou, du moins, quelque peu inappropriées à cet emplacement du document (s'agissant de propos plutôt à caractère introductif).

Ce qui est plus ennuyeux, c'est que le lecteur peut avoir le sentiment que toutes ces précisions soient faites au détriment d'explications plus ou moins essentielles sur le fond.

A commencer par les hypothèses relatives au modèle multifactoriel. En posant l'équation (4) *supra* dans leur paragraphe 2, les auteurs ne détaillent pas clairement leurs hypothèses et leurs notations. En outre, ils ne sont pas suffisamment explicites sur l'interprétation de leurs formulations.

Sur le premier point, ils oublient de préciser l'indépendance<sup>8</sup> des  $X_j$  avec  $Z_i$ , ils n'indiquent pas clairement comment sont établies les pondérations  $\phi_{i,j}$  et les corrélations entre les facteurs et ne donnent pas d'indication sur le choix de la copule que l'on retrouve dans l'égalité (7) *supra*. Quant aux notations, si elles ne sont pas toujours précisées (ainsi doit-on comprendre que  $\rho_i = R_i^2$  et que  $pd$  est une probabilité de défaut, etc.), elles semblent parfois alourdir inutilement les explications (intérêt de définir  $P = -L$  dans le paragraphe 51 ?).

Sur le second point, il aurait été utile d'insister sur le caractère diptyque du modèle : la quantité  $\sum_{j=1}^m \phi_{i,j} X_j$  est à rapprocher de la quantité  $\sqrt{\rho_i} X$  du modèle de Gordy et caractérise l'influence de facteurs externes macro économiques systématiques. Encore faut-il préciser ce qu'on entend par "facteurs systématiques". A l'appui des quelques exemples, on comprend qu'il s'agit principalement de pourcentages sur des variations d'indices

<sup>7</sup> au regard de la dimension du document

<sup>8</sup> cette propriété est en fait précisée dans le § 41 mais après que le modèle ait été présenté au §2

sectoriels. Mais dans ce cas : quelles sont les sources de telles données ? Sur quelles périodes ont-elles été observées ? Sur quels marchés ?

De la même façon, les implications du modèle de Merton sont livrées de façon assez brutale. L'écriture du défaut sous la forme :  $L_i(\omega) = l_i$  si  $Y_i(\omega) \leq N^{-1}(p_i)$ ,  $\omega \in \Omega$  est donnée telle quelle alors qu'une introduction comparable à celle proposée dans l'article [VAS02] aurait été judicieuse, notamment pour un lecteur non initié.

Encore une fois, il n'est donné aucune indication sur  $l_i$  qui représente le produit d'un engagement sur une contrepartie par les pertes prévisionnelles en cas de défaut. Sans le dire, les auteurs supposent cette quantité déterministe alors qu'il est possible que ce ne soit pas le cas (voir [CLS04]).

Quant au plan adopté, on peut regretter un manque de cohérence de nature à accroître la confusion du lecteur. Ainsi le modèle est-il présenté dans le second paragraphe puis repris en l'état dans le quatrième (après une interruption portant sur les scénarii de crise). De même, l'étude de cas relative au secteur automobile est déstructurée entre les paragraphes 41 et 43.

Il faut cependant reconnaître que la partie 5, qui introduit un indicateur de mesure du risque de concentration, obéit à un développement cohérent et organisé.

### 3.2 Analyse de fond

Les négligences faites sur la forme ont indéniablement des conséquences sur le fond et nuisent à la compréhension de l'exposé. S'agissant de l'article de G. Bonti, M. Kalkbrenner, C. Lotz et G. Stahl, le lecteur expérimenté peut être déçu de ne pas avoir trouvé de réelles innovations. Quant à un lecteur non initié, il lui sera difficile de comprendre en quoi le modèle proposé est différent des autres.

L'idée d'un modèle multifactoriel est a priori séduisante, elle n'est d'ailleurs pas nouvelle (voir [GKS06]), mais il ne faut pas oublier que les hypothèses simplificatrices de Gordy ont été volontairement établies pour réduire les risques de modèles et de simulations.

En introduisant un vecteur gaussien  $\mathbf{X}$ , le risque est précisément de mal estimer les paramètres de corrélation (au travers de la matrice de covariance) et les facteurs de pondérations  $\phi_{i,j}$ . Sur ce point pourtant essentiel, les auteurs de l'article ne précisent absolument rien et le lecteur ignore comment les données sont calibrées. Il faut d'ailleurs noter que les pondérations  $\phi_{i,j}$  doivent être choisies en cohérence avec le paramètre  $R_i$ , ce que nous verrons dans 4.

Les résultats présentés dans le paragraphe 4.3 sont intéressants. Ils aboutissent à la conclusion que les pertes d'un portefeuille de crédit obéissent à une loi de Vasicek dont la définition est mentionnée dans [VAS02] et dont la fonction de répartition (voir l'annexe pour les démonstrations) est :

$$\mathbb{P}(L \leq x) = F(x, p, \rho) = N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right] \quad (8)$$

Cette distribution est illustrée par le graphe 2 dans les situations normale et de crise. Il est important d'observer qu'on retrouve à chaque fois le caractère asymétrique et leptokurtique avec une queue de distribution plus épaisse dans le second cas. Mais les auteurs donnent finalement peu d'interprétations, hormis le fait qu'une simulation de crise impacte la structure de distribution, ce que nous admettrons<sup>9</sup>.

S'agissant de la définition du facteur de concentration, nonobstant un formalisme appréciable, il ne semble pas qu'il y ait là de réelle innovation. De nombreux articles évoquent plus ou moins directement cette notion en traitant de la granularité d'un portefeuille (voir par exemple [VAS02]).

<sup>9</sup>les simulations que nous avons réalisées ne nous permettent pas de conclure de cette façon

## 4 Suggestions et extensions

Reprenant le modèle proposé par G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl, il est tout d'abord possible de se demander si la contrainte  $\{X \leq x\}$  imposée à un facteur externe  $X$  pour simuler une crise est appropriée.

On peut par exemple se demander s'il n'est pas préférable (et peut être moins radical) de décentrer la distribution de  $X$  et d'observer les effets sur les autres facteurs. En procédant à des simulations, nous nous sommes rendus compte que ce qui importait, finalement, c'était la structure de dépendance choisie au travers de la matrice de variance - covariance. Il est d'ailleurs aisé de comprendre que choquer une variable brutalement en tronquant sa distribution ou la décentrer moyennant un accroissement de sa corrélation avec les autres pouvait conduire à des observations semblables.

On peut regretter de ne pas avoir davantage d'informations sur les simulations faites par les auteurs, en particulier sur les choix de dépendance qu'ils ont retenu. De notre côté, en l'absence de données extérieures, nous avons décidé d'implémenter une fonction *SigmaMu* renvoyant une matrice de variance - covariance (par une méthode de rejet afin qu'elle soit symétrique, définie, positive). Dès lors, en modifiant l'algorithme de Marsiglia Bray (*SimuX*), nous obtenons les résultats de la figure 1.

Un des points essentiels de l'article est l'estimation des statistiques découlant de la distribution des pertes du portefeuille de crédit. Nous avons donc décidé de procéder à des simulations visant à nous assurer que nous pouvions retrouver des courbes de type Vasicek. Pour bien comprendre notre démarche, il est nécessaire de reprendre le modèle écrit sous forme matricielle :

$$Y_i = {}^t \phi_i \mathbf{X} + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i \quad (4')$$

et de rappeler que la perte espérée du portefeuille est donnée par ( $m$  désigne le nombre de lignes de crédit) :

$$E(L) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{Y_i \leq N^{-1}(p)\}} \quad (9)$$

dans laquelle la probabilité non conditionnelle  $p$  est placée en argument (voir les raisons en annexe).

Les pondérations  $\phi_{i,j}$  ne peuvent être choisies n'importe comment puisqu'elles doivent permettre, *in fine*, que  $Y_i$  soit de loi normale centrée réduite. En supposant qu'elles aient été choisies entre 0 et 1 selon l'importance relative qu'occupe le facteur systématique  $j$  sur la contrepartie  $i$ , il reste donc à leur appliquer la transformation suivante ( $\sigma_j^2$  est la variance de  $X_j$ ) :

$$\phi_{i,j} \rho_i^{1/2} \left[ \sum_{j=1}^m \phi_{i,j}^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq m} \phi_{i,k} \phi_{i,l} \text{cov}(X_k, X_l) \right]^{-1/2} \leftarrow \phi_{i,j}$$

$$\text{ce qui permet d'obtenir : } \sum_{j=1}^m \phi_{i,j} X_j \sim N(0, \rho_i)$$

Cette transformation étant faite, on applique l'algorithme suivant :

```

Simuler un vecteur  $X \sim N(0, \Sigma)$ 
Simuler une variable  $Z \sim N(0, 1)$ 
Pour i variant de 1 à m
    compter 1 si  $Y_i \leq N^{-1}(p)$ 
    compter 0 sinon
FinPour
Sommer les valeurs digitales obtenues

```

En réalisant des tests d'adéquation (sous R), on s'aperçoit que les résultats obtenus nous conduisent à des distributions de type Vasicek dont la densité est donnée par (voir [VAS02]) :

$$f(x, p, \rho) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp \left[ -\frac{1}{2\rho} (\sqrt{1-\rho} N^{-1}(x) - N^{-1}(p))^2 + \frac{1}{2} (N^{-1}(x))^2 \right] \quad (10)$$

Et en superposant les courbes empiriques de l'algorithme avec les théoriques issues de la formule (10), on obtient les résultats de la figure 4.

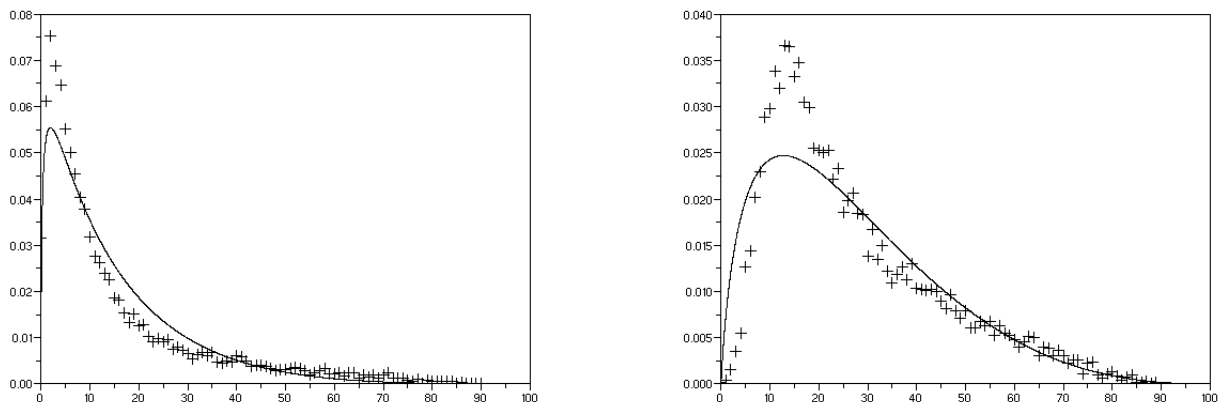


FIG. 4 – Distributions de pertes de  $L$  en situation normale (à gauche) et de crise (à droite)

Un dernier point intéressant concerne la formulation (7) du facteur de concentration. Mais les auteurs ne précisent pas quelle copule ils utilisent. Afin de procéder à des dépendances croissantes du facteur  $X$  et de la perte  $L$ , nous avons donc tracé les courbes illustrées sur la figure 3 en utilisant une copule de Clayton.

## Conclusion

Le sujet traité par G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz et G. Stahl s'inscrit dans une thématique passionnante, dynamique et pour laquelle de nombreux articles paraissent chaque année. Il faut dire que la conjoncture est favorable car les nouvelles dispositions des accords de Bâle induisent une demande soutenue de la part des décideurs. Les simulations de crise ou *stress testing* sont en effet essentielles dans les processus d'analyse capitalistique et décisionnels.

Dans ce contexte, l'ambition des auteurs de l'article *Credit Risk Concentrations under Stress* est de fournir une méthodologie plus générale que celles proposées par les approches IRB actuelles. Ceux-ci proposent un modèle multifactoriel permettant notamment de quantifier la concentration du risque de crédit. S'appuyant sur leur propre expérience, ils fournissent de nombreuses explications tenant davantage à l'intention de la recherche qu'à la recherche elle-même.

Car on ne peut être que déçu du peu d'informations livrées sur les données sources, les choix de paramètres et les calibrations faites, alors même que sont introduites des pondérations de façon semble-t-il arbitraire.

Mais dans le même temps, il est peut-être préférable de garder une certaine réserve sur la pertinence de l'article, considérant que les nombreuses zones d'ombre méritent tout simplement d'être explicitées. C'est d'ailleurs le conseil qui pourrait être formulé à l'attention des auteurs afin qu'ils réussissent à convaincre le lecteur de l'originalité et de l'efficacité de leur approche.

## Références

- [BIS04] Basel Committee on Banking Supervision, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework*, Bank for International Settlements, juin 2004
- [VOT05] Vo Thi P.N., *Tarification du crédit bancaire : que doit-on prendre en compte ?*, laboratoire d'économie d'Orléans, décembre 05
- [VAS02] Vasicek O.A., *The Distribution of Loan Portfolio Value*, RISK, décembre 2002
- [CLS04] Chabaane A., Laurent J.P., Salomon J., *Double impact : Credit Risk Assessment and Collateral Value*, janvier 2004
- [GKS06] Glasserman P., Kang W., Shahabuddin P., *Large Deviations in Multifactor Portfolio Credit Risk*, mars 2006

## Annexes et codes

**Distribution de pertes d'un portefeuille** On détaille la démonstration proposé par Vasicek visant à établir la distribution dans le cas monodimensionnel. Pour ce faire, on considère les pourcentages brutes de pertes d'un portefeuille de  $n$  lignes de crédit :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$$

Comme l'indique [VAS02], si les événements de défaut sur ces  $n$  lignes étaient indépendants, les pertes agrégées du portefeuille devraient obéir à une loi normale (théorème *Central limit*). Comme ce n'est pas le cas,  $L$  n'est pas gaussien et il est donc utile de s'intéresser à sa distribution.

En considérant que  $l_i = EAD_i \times LGD_i = 1$ , on peut écrire :  $L_i = \mathbf{1}_{\{Y_i \leq N^{-1}(p_i) | X\}}$ ,  $X$  est une variable traduisant un scénario possible.

La probabilité inconditionnelle peut s'écrire, en utilisant le théorème des probabilités totales :

$$\forall i \in [1, n] \quad p_i = \sum_{j=1}^m P_i(X_j) \mathbb{Q}(X_j) \quad (11)$$

avec :  $P_i(X_j) = \mathbb{P}(Y_i \leq N^{-1}(p_i) | X_j) = N \left[ \frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} X_j}{\sqrt{1 - \rho_i}} | X_j \right]$  et  $m$  le nombre de scénarii possibles

(11) permet d'envisager la probabilité inconditionnelle comme la moyenne des probabilités conditionnelles pour tous les scénarii. En effet, en supposant l'équiprobabilité de ces scénarii, il vient :

$$\forall j \quad \mathbb{Q}(X_j) = \frac{1}{m} \quad \text{d'où :} \quad \forall i \in [1, n] \quad p_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m P_i(X_j)$$

En supposant le portefeuille granulaire et **en fixant un scénario**  $X$ , les lignes de portefeuille deviennent indépendantes et il est possible d'appliquer la loi forte des grands nombres :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \xrightarrow{ps} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Y \leq N^{-1}(p) | X\}}) = \mathbb{P}(Y \leq N^{-1}(p) | X) = P(X)$$

On en déduit que :  $\mathbb{P}(L \leq x) = \mathbb{P}(P(X) \leq x)$  et comme la fonction  $x \mapsto P^{-1}(x)$  est décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(L \leq x) = \mathbb{P}(X \geq P^{-1}(x)) = \mathbb{P}(X \leq -P^{-1}(x)) = N(-P^{-1}(x))$$

$$\text{soit : } \mathbb{P}(L \leq x) = N \left[ \frac{\sqrt{1 - \rho} N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right]$$

La dérivée de cette expression en  $x$  conduit à une densité de la forme :

$$f(x, p, \rho) = \sqrt{\frac{1 - \rho}{\rho}} \exp \left[ -\frac{1}{2\rho} (\sqrt{1 - \rho} N^{-1}(x) - N^{-1}(p))^2 + \frac{1}{2} (N^{-1}(x))^2 \right]$$

de moyenne  $E(L) = p$  et de variance :  $Var(L) = N_2(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho) - p^2$  dans laquelle  $N_2$  désigne la fonction de répartition bivariée de la loi normale.

□

```

// *****
// *** gestion des risques et gestion actif-passif ***
// *** ***
// *** Auteurs : Bourges Mathieu ***
// *** Sibilleau Michael ***
// *** ***
// *** d'apres l'article "credit concentration under stress" ***
// *** G. Bonti, M. Kalkbrener, C. Lotz, G Stahl ***
// *****

// definir le repertoire de travail ici
chemin = 'C:\Documents and Settings\Utilisateur\Bureau'
chdir(chemin);

// simulation d'une matrice de variance / covariance
// m : nombre de facteurs externes (m>2)
function resultat = SigmaMu(m,dependance)
    bol = %t;
    while (bol==%t)
        bol=%f;
        xMax = grand(1,m,'unf',10,30);
        sd = xMax/3;
        SIGMA = diag(0.5*sd^2);
        if (dependance==%t) then
            for j=2:m
                for i=1:(j-1)
                    rho = grand(1,1,'unf',0.5,0.9);
                    SIGMA(i,j) = sd(i)*sd(j)*rho;
                end
            end
        end
        SIGMA = SIGMA+SIGMA';
        if (dependance==%t) then
            if (det(SIGMA)>0) then
                try
                    chol(SIGMA);
                catch
                    errclear
                    bol=%t;
                end
            else
                bol=%t;
            end
        else
            bol=%f;
        end
    end
    MU = zeros(m,1);
    resultat = [SIGMA MU];
endfunction

// generateur randnorm pour une loi normale tronquee (a partir de l'algo de
// MARSAGLIA)
function LoiNormTronquee(n,moyenne,variance,seuil,bol)
    grand('setgen','mt');
    if (bol==%t) then
        i = 1;
        while (i < n+1)
            bol2 = %t; // on veut une iteration du type do ... until
            while (bol2==%t)
                unif = grand(1,2,'def');
                unif = 2*unif-1;
                if (unif(1)^2+unif(2)^2 <= 1) then
                    disque(:,i) = [unif(1);unif(2)]; // on forme une matrice de 2
                    lignes
                    bol2 = %f;
                end
            end
            end
            S(i) = (disque(1,i))^2+(disque(2,i))^2;
        end
    end
endfunction

```

```

        Z(i) = sqrt(-2*log(S(i))/S(i));
        Z(i) = (Z(i)*disque(1,i))*sqrt(variance)+moyenne;
        if (Z(i) < seuil) then
            X(i) = Z(i);
            i = i+1;
        end
    end
    a = min(X);
    b = max(X);
    classe = linspace(a,b,30);
    histplot(classe,X);
end
endfunction

// Simulation des facteurs systematiques avec ou sans crise
// option :
// 0 : pas de crise
// 1 : crise sur le 1er facteur
// 2 : crise sur le deuxieme
// etc.
// n : nbre de simulation
function X = SimuX (MU,SIGMA,n,option,seuil,bol)
    if (bol==%t) then
        m = length(MU);
        if (size(MU) == [m,1] & size(SIGMA) == [m m]) then
            for i=1:n
                B = chol(SIGMA); // donne la matrice de Cholesky de SIGMA
                if (option > 0 & option < m+1) then
                    Y = grand(m,1,'nor',0,1);
                    X(:,i) = MU+B*Y;
                    while (X(option,i) >= seuil)
                        Y = grand(m,1,'nor',0,1);
                        X(:,i) = MU+B*Y;
                    end
                else
                    Y = grand(m,1,'nor',0,1);
                    X(:,i) = MU+B*Y;
                end
            end
        end
        disp(resultat);
    else
        disp("-----");
        disp("dimensions incompatibles, saisir : ");
        disp("mu : n*1");
        disp("sigma : n*n");
        disp("-----");
    end
    else
        X = 0;
    end
endfunction

// traces des histogrammes pour 4 lignes de credit seulement
// -----
function graphes (bol)
    if (bol==%t) then
        donnees = SigmaMu(4,%t);
        SIGMA = donnees(:,1:4);
        disp(SIGMA);
        MU = donnees(:,5);
        X = SimuX (MU,SIGMA,1000,1,-9,%t); // definition d'un choc ici
        xbas();
        for i = 1:4
            Xi = X(i,:);
            subplot(2,2,i); // partage de l'ecran graphique
            a = min(Xi);
            b = max(Xi);
            classe = linspace(a,b,30);
            histplot(classe,Xi);
        end
    end
endfunction

```

```

        select i
            case 1 then
                title('X'+string(i)+' : Allemagne');
            case 2 then
                title('X'+string(i)+' : USA');
            case 3 then
                title('X'+string(i)+' : automobile');
            case 4 then
                title('X'+string(i)+' : finance');
        end
    end
end
endfunction

// Simulation des pertes L
// -----

// n=nombre lignes de credit et m=nombre de facteurs
// P : vecteur 1*n de proba de default
// R : matrice des ponderations facteurs
// PHI : matrice n*m des ponderations

function L = SimuPertes (P,Rho,PHI,choc,bol)
    if (bol==%t)
        N = 10000; // nombre de simulations de L
        dim = size(PHI);
        n = dim(1); // nbre de lignes de credit
        m = dim(2); // nbre de facteurs systematiques
        donnees = SigmaMu(m,%t); // recup des donnees + choix de dependance ----
        --
        SIGMA = donnees(:,1:m);
        disp("matrice de variance - covariance");
        disp("-----");
        disp(SIGMA);
        MU = zeros(m,1);
        //-----
        // calibrage de PHI
        for j=1:n
            dep = 0;
            for k2=1:m
                for k1=1:(k2-1)
                    dep = dep+2*PHI(j,k1)*PHI(j,k2)*SIGMA(k1,k2);
                end
            end
            somme = (PHI(j,:).^2)*diag(SIGMA);
            for k=1:m
                PHI(j,k) = PHI(j,k)*(sqrt(Rho(j)/(somme+dep)));
            end
        end
        for j=1:n
            dep = 0;
            for k2=1:m
                for k1=1:(k2-1)
                    dep = dep+2*PHI(j,k1)*PHI(j,k2)*SIGMA(k1,k2);
                end
            end
            test(j)=(PHI(j,:).^2)*diag(SIGMA)+dep
        end
        for i=1:N
            if (choc==%t) then
                X = SimuX (MU,SIGMA,1,1,-3,%t); // << --- choc --- >>
            else
                X = SimuX (MU,SIGMA,1,0,0,%t); // << --- pas choc --- >>
            end
            ind = zeros(1,n); // vecteur d'indicatrices
            for j=1:n
                Z = grand(1,1,'nor',0,1);
                Y(j) = PHI(j,:)*X + sqrt(1-Rho(j))*Z;
            end
            fprintfMat("Y.dat",Y);
        end
    end
end

```

```

        for j=1:n
            quantile_j = cdfnorf("X",0,1,P(j),1-P(j));
            if (Y(j) <= quantile_j) then
                ind(j) = 1;
            end
        end
        L(i) = sum(ind);
    end
// exportation de L en vue de tests sous R
    mopen("L.dat","w+");
    fprintfMat("L.dat",L);
    mclose("L.dat");
end
endfunction

// trace de la distribution de pertes
function PlotPertes (bol)
    N = 100; // nbre de lignes de credit
    M = 10; // nbre de facteurs
    P = 0.2*ones(1,N); // proba de default non conditionnelle
    Rho = grand(1,N,'unf',0.2,1); // ponderations
    PHI = grand(N,M,'unf',0,1);
    if (bol==%t) then
        // ----- definir le choix d'un choc ici -----
        donnees = SimuPertes(P,Rho,PHI,%f,%t)';
        donnees = gsort(donnees,'c','i');
        n = length(donnees);
        p = max(donnees);
        pas = 1; // pas d'aggregation
        frequence = [];
        n_comp = 0;

        for k = 0:(ceil(p/pas))
            v = length(find(donnees>=k*pas & donnees<(k+1)*pas));
            frequence = [frequence v/n];
            n_comp = n_comp+v;
        end
        plot2d([0:(ceil(p/pas))*pas,frequence,-5);
        a=recherche(donnees/N,%t);
        x=[0.0001:0.0001:0.9999];
        y=densite(x,a(1),a(2));
        plot2d(x*N,y/100);
// qqplot_vasicek(donnees/N,a(1),a(2));
    end
endfunction

// fonction de Vasicek
function y = densite(x,p,rho)
    z = cdfnorf("X",zeros(1,length(x)),ones(1,length(x)),x+0.00001,1-x-0.00001);
    t = cdfnorf("X",0,1,p,1-p);
    y = sqrt((1-rho)/rho)*exp(-((sqrt(1-rho))*z-t)^2/(2*rho)+0.5*z^2);
endfunction

function resultat = recherche(x,bol)
    x=gsort(x,'c','i');
    p=mean(x);
    Y=nfreq(x);
    mod=Y(max(find(Y(:,2))==max(Y(:,2)))));
    t=cdfnorf("X",0,1,mod,1-mod);
    s = cdfnorf("X",0,1,p,1-p);
    minim = 8000000;
    for rho=0.01:0.01:0.49
        y = (sqrt(1-rho)/(1-2*rho)-(t/s))^2;
        if (y<minim) then
            minim = y;
            aux =rho;
        end
    end
    resultat=[p aux];
end

```

```
disp("valeurs de p et rho : ");
disp("-----");
disp(resultat);
endfunction

function qqplot_vasicek(ech,p,rho)
    ech_trie = gsort(ech,'c','i');
    n=length(ech);
    alpha=[(1/n):(1/n):(1-1/n)];
    quan_th=vasicekinv(alpha,p,rho);
    plot2d(quan_th,ech_trie(1:(n-1)),-1);
    minimum=min([quan_th ech_trie(1:(n-1))]);
    maximum=max([quan_th ech_trie(1:(n-1))]);
    plot2d([minimum maximum],[minimum maximum])
endfunction

function resultat=vasicekinv(alpha,p,rho)
    aux1=cdfnor("X",zeros(1,length(alpha)),ones(1,length(alpha)),alpha,1-alpha);
    aux2=(sqrt(rho)*aux1+cdfnor("X",0,1,p,1-p))/sqrt(1-rho);
    resultat=cdfnor("PQ",aux2,zeros(1,length(aux2)),ones(1,length(aux2)));
endfunction

function resultat = FC(p,q,alpha)
    resultat = ((p^(-alpha)+q^(-alpha)-1)^(-1/alpha))/p;
endfunction

function TraceFC(bol)
    p = 0.4;
    q = 0.0001:0.001:1
    if (bol==%t) then
        indep = FC(p,q,0.0001);
        com = FC(p,q,100);
        inter1 = FC(p,q,1);
        inter2 = FC(p,q,4);
        xbas();
        plot2d(q,indep,style=1);
        plot2d(q,com,style=5);
        plot2d(q,inter1,style=3);
        plot2d(q,inter2,style=2);
    end
endfunction

// routines d'exécution
LoiNormTronquee(1000,0,40,-2,%f);
graphes(%f);
PlotPertes (%f);
TraceFC(%f);
```