Introduction générale

Marchés « cash » ou spot

Marché off shore

Marché des actions

Fonds propres

Marché des taux d'intérêt

Dette (bancaire ou souscrit auprès du marché)

Marché monétaire

Marché obligataire

durée d'emprunt : **< 1 an** **> 1 an**

Support utilisé :

Marché interbancaire

Réservé aux établissements bancaires de la zone euro. Les opérations de prêt peuvent être **« en blanc »** ie sans garantie (donc + chères car il y a un risque. Le tx de référence des opérations au « jour le jour » (**overnight**) est l'**EONIA** (Euro Overnight Index Average) calculé à partir d'un panel de 57 banques[(1)] (Ex. moyenne quotidienne 35,6 Mds euros au 2ème trimestre 2004 dont 16,4 Mds pour la place de Paris).

Les transactions peuvent également s'effectuer en **pension livrée** ie des titres sont donnés en garantie. Indicateur de cette activité = **Euroclear**. La pension livrée est + répendue et croissante.

Marché des titres et créances négociables (TCN)

Les TCN comprennent 2 segments distincts selon que l'émetteur soit :

Pré compté

Un établissement public	**Un établissement privé**
Pour le court terme : bons du trésor (treasury bums) tels que les BTF : l'Etat français est très endetté.	- billets de trésorerie (court terme : 1 week, 1 month), - certificats de dépôts (moyen terme 1, 3 months).

Post compté

- bons à moyen terme négociables (BMTN),
- bons à tx fixes et annualisés (BTAN)

Marché des swaps

Echanges de devises, etc. (voir plus tard).

(1) semblable à **l'Euribor** (Euro interbank offered rate) : même panel de 57 banques dont 51 sont européennes. Pour Londres, on trouve l'équivalent **Libor**. Euribor et Libor sont des tx **Ibor** (interbank offered rate ie tx interbancaire offert).

Marchés « cash » ou spot (1)

Marché des dérivés

Marché off shore

Marché des actions

Marché des taux d'intérêt

Sur ce marché, tout est du terme (2)

Marché à terme

Marché des options

Marché OTC (over the counter)

Marché dit de **« gré à gré »**. Les transactions sont effectuées par téléphone ou informatiquement entre 2 institutions financières ou entre une institution financière et un de ses clients. Ces institutions jouent le rôle de « teneur de marché » (**market makers**) ie elles cotent les prix des produits qu'elles sont prêtes à acheter (prix demandé ou **bid**) et des prix auxquels elles sont prêtes à vendre (offre ou **ask**).

Sur ce marché, tout est donc négociable. Le marché n'est pas intermédié

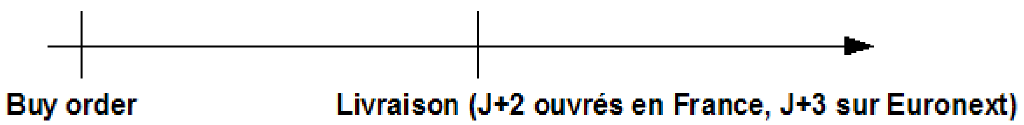
Marchés organisés

Ici, il y a une standardisation des contrats : date d'échéance du contrat, quantité, prix et nature de l'actif financier, etc.

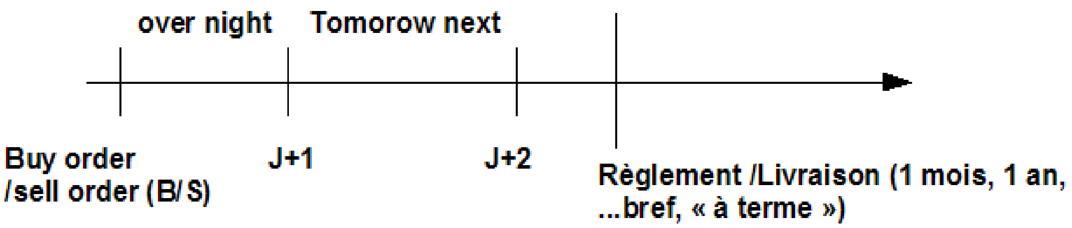
C'est le cas de la Bourse (en France, c'est **Euronext**).

---

(1) marché cash : si je passe un ordre d'achat, je ne serai propriétaire qu'à la date de livraison (c'est la règle du règlement / livraison ie settlement = date de livraison) :



(2) à terme : la liquidation se fait non pas à J+2 mais à J par un intermédiaire (la banque ...c'est donc facturé). Il s'agit d'un ordre SRD (service règlement différé).



Remarques :

1. Les métiers sur les marchés se situent :

au **FRONT OFFICE** :

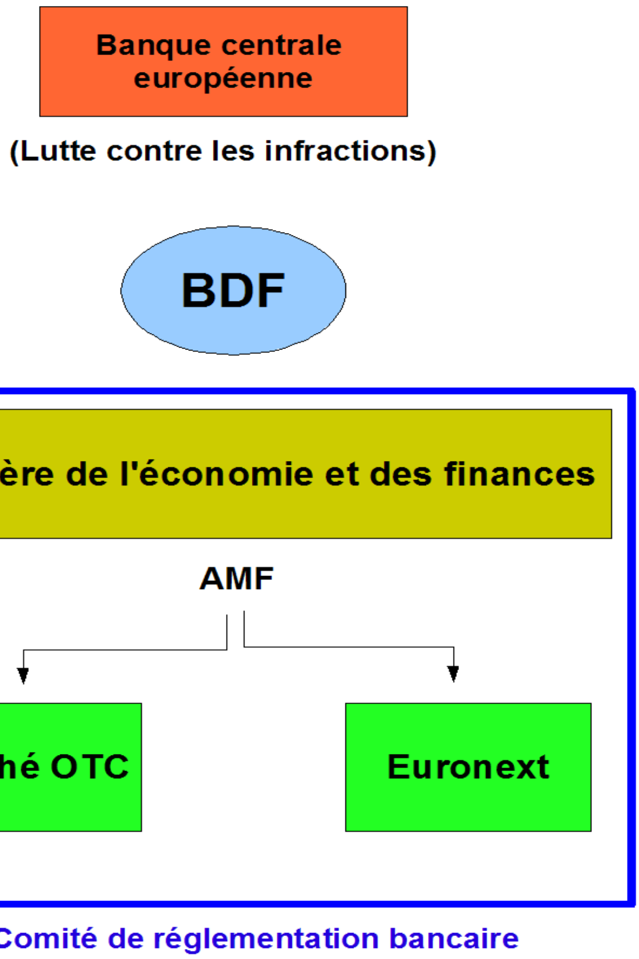
- traders : passent des ordres d'achat et de vente.,
- sales men : rôle commercial (interface avec le client final),
- analytes : réalisent des analyses de sociétés pour faire des prescriptions d'achat et de vente.

au **MIDDLE OFFICE** :

- cellule de pricing (prix),
- cellule de contrôle des risques,
- contrôle des traders.

au **BACK OFFICE** : sorte de comptable en fin de chaîne d'exécution : c'est de la comptabilité finale de titres et d'opérations.

2. « Hiérarchie » :



3. Marchés organisés et marchés de gré àgré.

31. Les marchés organisés (d'actifs dérivés) : marché sur lequel sont échangés des **contrats standardisés et élaborés par les autorités du marché**. Le **Chicago board of trade** a été créé en **1848** pour confronter les offres et demandes de grains des fermiers. Au départ, il s'agissait de standardiser les quantités et qualités des grains échangés. Rapidement, les spéculateurs ont préféré spéculer sur les contrats plutôt que sur le grain lui-même => naissance des contrats futures.

Aujourd'hui, s**ur le marché européen**, les marchés de référence sont :
- **Eurex** (dérivés germano suisses),
- **Liffe** (London international Financial Futures Exchange) du groupe **Euronext**.

32. Les marchés de gré à gré (over the counter OTC) : marché sur lequel les échanges sont effectués par téléphone (les conversations téléphoniques sont enregistrées) ou informatiquement.
Les transactions sont en général d'un montant moyen plus important que sur le marché organisé.
Avantage : traitement de produits sur mesure.
Inconvénient : une des parties peut faire défaut.

4. Définitions :

Titre financier (« security ») : **contrat** où les parties s'échangent des flux d'argent. Un marché financier (**financial market**) est un lieu où on s'échange des titres financiers. Les opérateurs de marchés sont souvent autorisés à vendre à « découvert » (**short sell**) des titres qu'ils ne possèdent pas. Vendre un titre à découvert équivaut à s'engager à verser les cash flows à l'acquéreur.

Action : part du capital social (= **titre de propriété**) => les actionnaires perçoivent des dividendes si le conseil d'administration le décide ... et également la plue value de la cession. l'actionnaire a un droit de regard et de décision sur la gestion de l'entreprise (lors des assemblées générales).

Obligation (bond) : **titre financier correspondant à un emprunt** (= **titre de créance**). L'obligataire a le droit d'être remboursé et de percevoir des intérêts (= coupon pour les obligations). Ce sont ses seuls droits.

Créance **:** un titre de créance est un titre représentatif d'une dette. Il existe une opération de **titrisation** où une créance est transformée en un titre financier. La banque prête de l'argent à une entreprise, cet argent fournit des titres financiers à la banque. C'est le seul moyen, pour un prêteur, de se séparer du prêt.

Produit structuré : produit qui garanti un capital minimal.

Point de base (pb) : 0,01%. Ex. variation de 100pb = variation de 1%.

Remarques :

1. **Obligations** : doivent comporter des clauses de subordination :
- dettes seniors (elles sont prioritaires)
- dettes junior
- dettes mezzanine (subordonnée au fait que l'entreprise ait des bénéfices).

  => pas les mêmes droits ni les mêmes risques.

2. Seules les entreprises privées émettent des actions (ex. EDF est privée au sens financier du terme)
3. Obligations : entreprises publiques et privées.
4. Flux de titres = 190 milliards d'euros / an (75 % public).

Gestion obligataire

I. Classification des obligations.

A. à taux fixe (= straight bonds). Obligation dont **le taux facial, fixé au moment de l'émission, ne varie pas en fonction de l'évolution du marché**. Toutefois, le tx peut être modifié au cours de la durée de vie de l'obligation si cette modification a été préalablement prévue dans le contrat d'émission.

Elles procurent un **risque en capital** : si les taux montent => valeur du portefeuille baisse => risque en capital (= valeur du portefeuille).
Les états s'endettent essentiellement sous cette forme d'obligation (en particulier l'Etat français)
Il existe des **notations** (AAA ou 111 pour le meilleur = émetteur de 1ere catégorie = le risque de non remboursement est nul).
Rq. : Si le risque est plus élevé, la rémunération demandée l'est aussi.

Exemples : **OAT (obligations assimilables au trésor** pour du court terme ie max de 3 mois); **BTAN (bons du trésor à taux fixe et à intérêt annuel** pour du moyen terme ie de 2 à 5 ans) en France / Bund en Allemagne.

B. à taux variables (= Floating Rate Notes – FRN) Obligations qui verse au détenteur une **rémunération qui évolue en fonction d'un ou plusieurs indices définis dans le contrat d'émission**.
Ici, il n'y a pas de risque en capital, mais un **risque en revenus** (coupon).

On distingue :

- les obligations à **taux variables « stricto sensu »** : on travaille sur des taux **post déterminés** (= taux connus à posteriori)

r(t) et non $r_0(t)$

Ex. : taux qui sont les moyennes des taux quotidiens tq T4M (TMMMM : tx moyen mensuel du marché monétaire), TAM (tx annuel du marché monétaire).

- les obligations à **taux variables révisables**. on travaille sur des taux **pré déterminés** (Ex. Euribor, Libor)**.**

coupon = nominal*tx d'intérêt constaté au début de l'emprunt $r_0(t)$

Exemples : OAT TEC 10 (= tx à échéance 10 ans, donc du long terme) que l'état a lancé en 1996 (voir poly p.4) / OATi (indexé sur l'inflation – voir poly p. 5)

Remarques générales :

1. Une variations des taux a un impact contraire sur A et B.

2. Il existe des **obligations hybrides** ayant à la fois un caractère d'obligation et permettant de devenir actionnaire. Ex. : **OCA** (obligations convertibles en action / a partir d'une certaine date et à un certain prix), **OCEANE**, ORA (remboursable en action), **OBSA** (titre détaché de l'obligation) dans laquelle il y a 2 actifs : une obligation + un bon de souscription d'action (**BSA**).

3. Les obligations sont toujours cotées en **pourcentage pied de coupon** : % <=> VN=100 / pied de coupon <=> le coupon n'inclus pas le montant des intérêts courus depuis le dernier détachement de coupon.

II. Modes de remboursement des obligations (rappels).

- **In fine (**majorité des cas),
- à **séries égales (= amortissement constant),**
- à **périodicité constante (= annuité constantes)**

VE = **valeur d'émission** (valeur à laquelle est réellement vendue l'obligation)
VN = **valeur nominale** (« par amont ») ie qui sert à faire le calcul
VR = **valeur de remboursement**

Règles et définitions :

Si VE=VN => émission au pair,
Si VE<VN => prime d'émission (= rémunération supplémentaire),
(le cas VE>VN n'est pas vu en pratique)

Si VR=VN => remboursement au pair
Si VR>VN => prime de remboursement

valeur d'une obligation : somme actualisée des revenus : $P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$

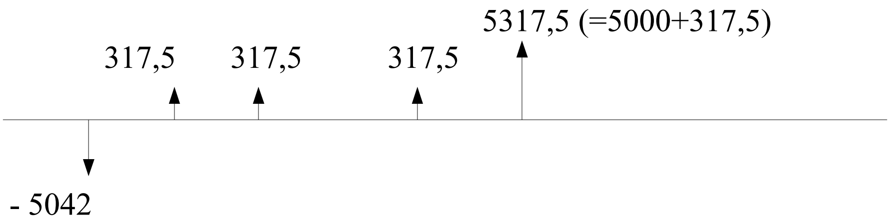
Exercice 1 : Soient 3 Mds d'euros émis en 600.000 obligations de valeur nominale VN=5000 euros. Durée=5 ans; date d'émission est le 22/11/2005. Le coupon est calculé au taux d'intérêt 6.35% l'an, versé tous les 22/12. Remboursement au pair, in fine.
Prix d'émission=5.042 euros.

Entre le moment où la décision a été prise et le placement sur le marché, les conditions du marché sont telles que le prix d'émission est supérieur au nominal!

Rappel : $coupon(in\ fine) = VN \times i$ où VN est le taux nominal (facial) et i le coefficient d'indexation.

Les caractéristiques pour les souscripteurs sont les suivantes :
- acquisition de l'obligation à 5.042 euros (VE)
- perception tous les 22/12 d'un coupon de 317,5 euros (= 5000*6,35%),

– remboursement final de 5.000 euros (VR)



☞ **point de vue du souscripteur** : le t**aux actuariel = rendement de l'obligation** est TRI (IRR/YR à la calculette) = 6,15%

☞ **point de l'entreprise :**

Dates	***22/12/05***	***22/12/06***	***22/12/07***	***22/12/08***	***22/12/09***	***22/12/2010***
VN	5000					
VE	5042					
Ecart	42					
IS sur l'écart	-12.6					
Coupons		-317,5	-317,5	-317,5	-317,5	-317,5
Eco IS sur coupon		95,25	95,25	95,25	95,25	95,25
Rembours.						-5000
FLUX	**5029,4**	**-222,25**	**-222,25**	**-222,25**	**-222,25**	**-5222,25**

On en déduit le **taux actuariel = coût de l'emprunt** net d'impôt = 4,31%

<u>Exercice 2</u> : soit l'émission d'obligations aux spécificités suivantes :

VN=1000 euro (par titre); tx d'intérêt=10%; durée 5 ans. Remboursement par amortissements constants.
Le taux de rendement sur le marché est de 12%

Prix d'achat ?

années	***Capital restant dû***	***amortissement***	***intérêts***	***annuités***
0	1000			
1	800	200	100	300
2	600	200	80	280
3	400	200	60	260
4	200	200	40	240
5	0	200	20	220

À la calculette : Cfj0=0; Cfj1=300; etc., N=5; I/YR=12
=> NPV donne 953 euros=prix d'achat.

VAN=953 euros

<u>Remarques générales :</u>

maturité => maturity date

coupon => coupon (zéro coupon => zero-coupon bond)
TRI => yield
taux de rentabilité => ROR (rate of return)
VAN => NPV (net present value)

III. Valorisation et rendement des titres à revenu FIXE.

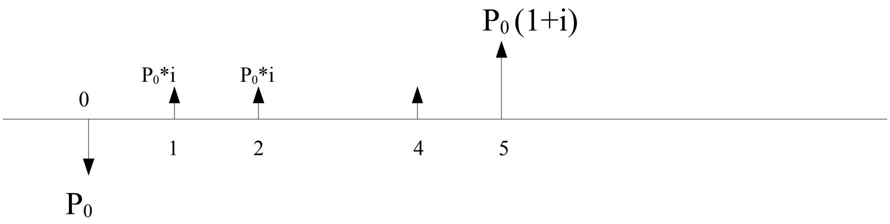
21. Valorisation des obligations.

On suppose pour la suite que le tx du marché s'établit à r=10% (ie TRA)

Effet maturité :

A et B sont 2 obligations in fine, remboursables au pair, coupon de i=7%

maturité (A) = 5 ans
maturité (B) = 10 ans



$$P_0(A)=\frac{7}{1,1}+\frac{7}{1,1^2}+\frac{7}{1,1^3}+\frac{7}{1,1^4}+\frac{107}{1,1^5}=88,63\,euros$$

$$P_0(B)=\sum_{t=1}^{t=10}\frac{7}{1,1^t}=81,56\,euros$$

A la calculette : N=5; I/YR=10; Cfj0=0; Cfj1=7; etc. => NPV ?

Effet coupon :

A et B sont 2 obligations in fine, remboursables au pair; maturité = 5 ans

coupon (A) = 7%
coupon (B) = 14%

$$P_0(A)=\frac{7}{1,1}+\frac{7}{1,1^2}+\frac{7}{1,1^3}+\frac{7}{1,1^4}+\frac{107}{1,1^5}=88,63\,euros$$

$$P_0(B)=\frac{14}{1,1}+\frac{14}{1,1^2}+\frac{14}{1,1^3}+\frac{14}{1,1^4}+\frac{114}{1,1^5}=115,16\,euros$$

Rq : lorsqu'on a $P_0(A)>VN$ => obligation **sur cotée par rapport au pair.**
Si on a $P_0(A)<VN$ => obligation **sous cotée par rapport au pair**
Si on a $P_0(A)=VN$ => obligation au pair.

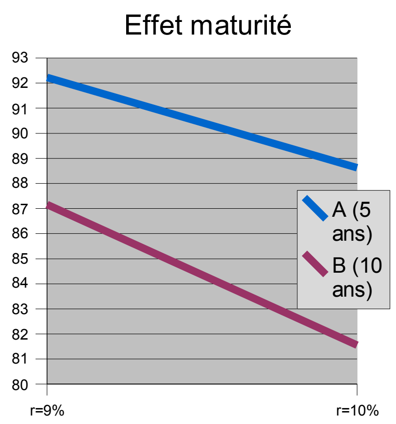
Asymétrie (influence des tx du marché)

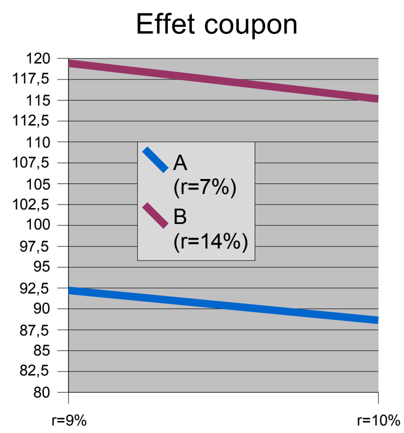
A est une obligation in fine, remboursables au pair; maturité = 5 ans

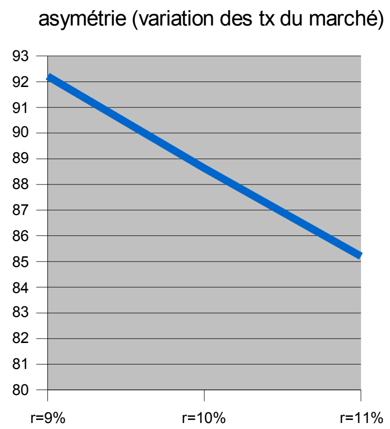
$$P_0(tx\ marché\ i=0{,}09)=\frac{7}{1{,}09}+\frac{7}{1{,}09^2}+\frac{7}{1{,}09^3}+\frac{7}{1{,}09^4}+\frac{107}{1{,}09^5}=92{,}22\ euros$$

$$P_0(tx\ marché\ i=0{,}1)=\frac{7}{1{,}1}+\frac{7}{1{,}1^2}+\frac{7}{1{,}1^3}+\frac{7}{1{,}1^4}+\frac{107}{1{,}1^5}=88{,}63\ euros$$

Bilans :







↑ Maturité => ↓ P0

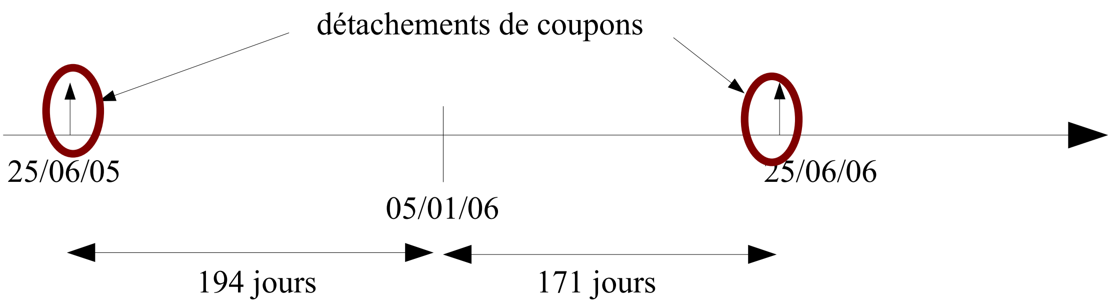
D'autre part, B **est plus sensible aux fluctuations des tx d'intérêt**
Si j'anticipe une baisse des tx
=> choix de B

↑ Coupon => ↑ P0

D'autre part, A **est plus sensible aux fluctuations des tx d'intérêt**
Si j'anticipe une baisse des tx
=> choix de A
Idéal = zéro coupon

↑ Tx marché => ↓ P0

22. Cotation des obligations.



Le prix de l'obligation est : Prix = cours + coupon couru

Ex. : calculer le prix d'une obligation émise à 5% au 05/01/2006, remboursable in fine le 25/06/11 et servant des coupons tous les 25/6. Tx du marché r= 4%

On **calcule la valeur** au 25/06 (c=5%*100)

$$V(25/06/06)=5+\frac{5}{1{,}04}+\frac{5}{1{,}04^2}+\frac{5}{1{,}04^3}+\frac{5}{1{,}04^4}+\frac{105}{1{,}04^5}=109{,}45\ euros$$

On actualise cette somme au 05/01 : $Prix\ ou\ valeur\ de\ l'obligation = \frac{109{,}45}{1{,}04^{(\frac{171}{365})}} = 107{,}46\ euros$

Calcul du coupon couru : 5 ↔ 365 $\quad Coupon = \frac{5*194}{365} = 2{,}65$

Coupon ↔ 194

Calcul du cours au 5/01/06 : $Cours = Prix - Coupon\ couru = 107{,}46 - 2{,}65 = 104{,}809$

IV Mesure du risque.

41. Sensibilité (Am. « duration »)

C'est la variation relative (en pb) du prix d'une obligation pour une variation des tx du marché r limitée :

$$\boxed{S = \frac{1}{P} \times \frac{dP}{dr} = \frac{P'(r)}{P} < 0}$$

Schématiquement, **une obligation ayant une sensibilité de 5 verra sa valeur baisser d'environ 5% si son taux d'intérêt augmente de 1%**, et, inversement, sa valeur augmenter d'environ 5% si les taux baissent de 1%. Néanmoins, il convient de se souvenir que le prix P n'évolue pas de façon linéaire en fonction du taux actuariel r et que **l'erreur croît avec l'écart de taux qu'on applique**.

42. Duration (Am « modified duration »).

C'est la durée de vie moyenne actuarielle d'un titre. C'est une notion intimement liée à la sensibilité qui mesure l'élasticité du prix d'une obligation par rapport au tx d'intérêt. $\boxed{D = -S \times (1+r)}$

Rq. on a : $\boxed{S \times r = -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{r}} \approx -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}} = D}$

On montre que : $D = \frac{1+r}{r} - \frac{1+r+n(c-r)}{c[(1+r)^n - 1] + r}$ car en effet : $P = \sum_{t=1}^{t=n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$ et $F_t = c \times VN$

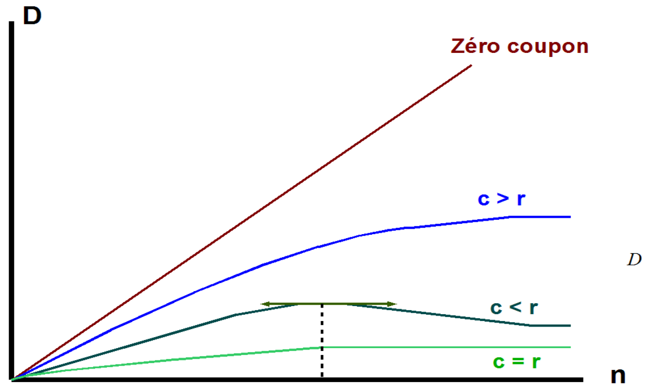
Analyse :

1/ $\frac{dD}{dc} < 0$ => la duration varie inversement au tx facial

2/ si **c = 0 (zéro coupon)** => D=n la duration est égale à la maturité.

3/ si **c = r (obligation au pair)** => $D = \frac{1+r}{r}[1 - \frac{1}{(1+r)^n}]$

4/ si $n \to \infty$ (**rente perpétuelle**) alors $D = \frac{1+r}{r}$



$D=\frac{1+r}{r}$

43. Convexité.

431. Rappels de mathématiques.

Une fonction f de I vers $\mathbb{R}$ est dite **convexe** (resp. concave) ssi, pour tous x et y de I et tout α dans [0, 1] on a :

$$\boxed{f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)}$$

Cela signifie que pour tous x et y de I, le segment [A,B] où A=(x, f(x)) et B=(y, f(y)) est situé **au-dessus de la courbe** représentative de f.

Propriété :

Une fonction f deux fois dérivable sur I est **convexe** (respectivement : concave) sur I si et seulement si $\boxed{f''(x)\geqslant 0}$ (respectivement : $f''(x)\leqslant 0$) pour tout x de I.

Une fonction f deux fois dérivable sur I est strictement convexe (respectivement : strictement concave) sur I si et seulement si sur I si et seulement si $f''(x)\geqslant 0$ (respectivement : $f''(x)\leqslant 0$) pour tout x de I ET l'ensemble des x tq $f''(x)=0$ est d'intérieur vide.

Exemples :

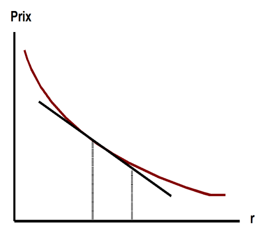
$x\rightarrow|x|$ est convexe (mais pas strictement)

$x\rightarrow x^2$ est strictement convexe

$x\rightarrow\ln(x)$ est strictement concave

432. Application.

Le graphe 41 montre que le prix d'une obligation est strictement décroissante et convexe en fonction de r :



plus la convexité est forte, plus le prix de l'obligation diminue lentement (resp. augmente rapidement) si r croît (resp. décroît).

Comment mesurer ce phénomène? => par la dérivée seconde :

$$\Delta P = P(r+\Delta r) - P(r) = \Delta r . P'(r) + \frac{\Delta r^2}{2!} P''(r)$$

d'où : $$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r . P'(r)}{P} + \frac{\Delta r^2}{2!} \frac{P''(r)}{P} = S \Delta r + \frac{\Delta r^2}{2} P''(r)$$

44. Théorie du portefeuille.

Définition : un portefeuille (« portfolio ») est un ensemble de plusieurs actifs.

Question **:** comment valoriser le portefeuille ?

441. Valorisation « au prix du marché » (« market to market ») :

Désignation	***quantité***	***Prix unitaire***	***valeur***
A	100	0,10	10
B	200	20	4000
portefeuille	1		4010

442. Position longue (long position) et courte (short position) :

Les opérateurs du marché ont le droit de vendre des actifs à découvert et dans ce cas, les quantités sont alors négatives :

- **position longue** : on détient une quantité d'un actif,
- **position courte** : lorsqu'on vend à découvert.

Désignation	***quantité***	***Prix unitaire***	***valeur***
A	Long 100	0,10	10
B	Short 200	20	-4000
portefeuille			-3090

Ici, la valeur de -3090 euros signifie que liquider (**liquidate**) **le portefeuille occasionnera une sortie de trésorerie de 3090 euros car il faudra vendre 100 actions A contre 10 euros et acheter 200 actions B contre 4000 euros.**

443. Cas général:

La valeur d'un portefeuille est : $$\boxed{V(P) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in Long}}^{k=K} q_k p_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \in Short}}^{k=K} q_k p_k}$$

avec q_k les quantités et p_k les prix unitaires.

45. Immunisation de portefeuille (duration matching)

Objectif : **rechercher la durée d'investissement tq le capital acquis soit insensible à toute variation des tx d'intérêt**.

<u>Idée</u> : couvrir les positions contre le risque de taux en s'assurant que **la duration moyenne des actifs coïncide avec celle des passifs (ie. position courte)** => le gain (resp. la perte) sur les actifs doit être compensée par la perte (resp. le gain) sur les passifs.

<u>Rq</u>.: l'immunisation ne protège pas contre des déplacements non parallèles des courbes des taux (en pratiques, les tx courts sont plus volatils.

<u>Théorème</u> : La variation d'un portefeuille en fonction de r est nulle (**portefeuille parfaitement immunisé**) ssi **H=D** avec H : horizon d'investissement et D : duration du portefeuille.

<u>Dém. :</u> valeur d'un portefeuille à la date j : $V_j = V_0 \times (1+r)^j$

On dérive par rapport à r (attention : V_0 dépend de r) : $\frac{\partial V_j}{\partial r} = V_0 j (1+r)^{j-1} + \frac{\partial V_0}{\partial r}(1+r)^j$ (1)

Or, la duration D vaut : $D = \frac{-\frac{\partial V_0}{V_0}}{\frac{\partial r}{1+r}}$ ssi $\frac{\partial V_0}{\partial r} = -D \frac{V_0}{1+r}$ (2)

On injecte (2) dans (1) => $\frac{\partial V_j}{\partial r} = V_0 j (1+r)^{j-1} - D V_0 (1+r)^{j-1} = (1+r)^{j-1} V_0 (j-D)$

Et donc :

$$\frac{\partial V_j}{\partial r} = 0 \quad \text{ssi} \quad j = D$$

Les marchés à terme

I. Généralités sur les produits dérivés.

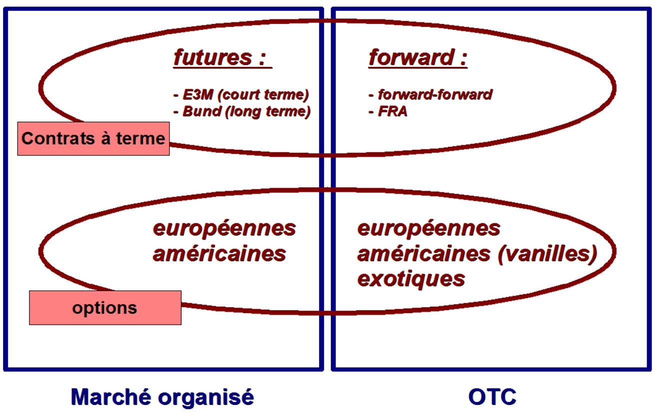
Produit dérivé (derivative security) : titre dont la valeur dépend d'un autre actif appelé **actif sous-jacent** (underlying asset).

Ex. : contrat d'achat d'1M de barils de pétrôle dans 1 mois à un prix fixé à l'avance de 20 euros le baril est un produit dérivé dont l'ASJ est le baril de pétrôle. Si le cours du baril monte, on fait une bonne affaire car la valeur du contrat augmente avec le cours.

De manière plus générale, si on note D_t **la valeur du produit dérivé** (= **profil de gain *payoff***) à l'instant t et S_t **l'actif sous-jacent**, alors il existe une fonction f tq : $D_t = f(t, S_t)$.
Dans l'ex. : $D_t = 1\text{M} \times (S_t - 20)$ <=> bénéfice réalisé en achetant 1M de baril à 20 euros et en les revendant « immédiatement ».

2 grandes classes de produits dérivés :

- les **contrats à terme** (**forward**
- ou ***futures***),
- les **options.**



11. Contrats forwards.

Un contrat **forward** est un engagement ferme à acheter (buy order) ou à vendre (sell order) un ASJ à une date future fixée pour un prix donné. Il est différent du contrat **spot** dans laquelle la transaction est réalisée « immédiatement ». Ce contrat est échangé sur un marché **OTC**, la partie qui s'engage à acheter prend une position longue et celle qui vend une position courte.

12. Contrats *futures*.

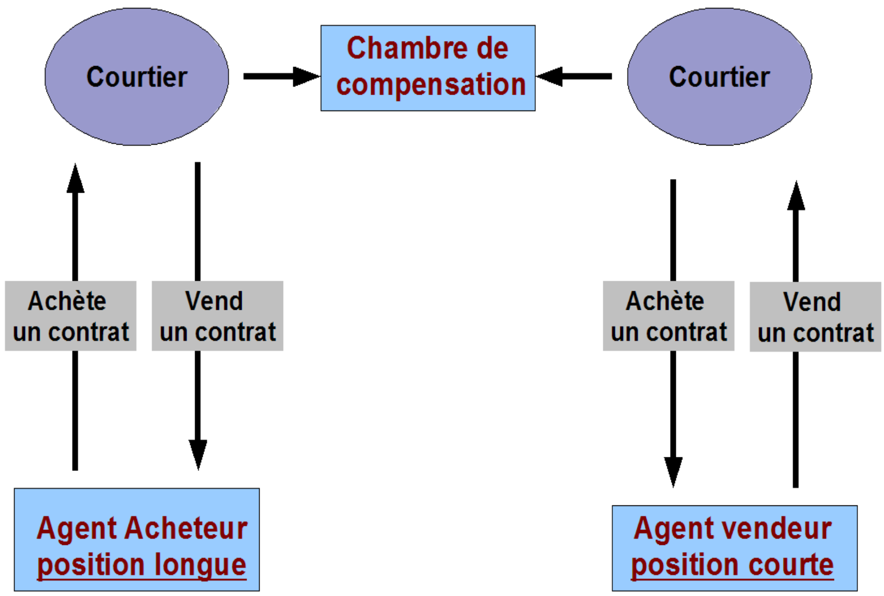
121. Définitions et principe.

Un contrat ***futures*** est semblable au forward à **3 différences près** :

- ils sont négociés sur des **marchés organisés**. L'évolution du prix futures est contrainte par **un minimum : le tick (= ½ pb)** et par un maximum quotidien. Ce **maximum correspond à une amplitude maximale de fluctuation quotidienne** des cours de x% au delà de laquelle le marché est automatiquement fermé (on dit *limit up* s'il est fermé à la suite d'une hausse des cours et *limit down* si c'est une baisse).

- les échanges des futures sont gérés par l'autorité qui veille au bon fonctionnement des marchés organisés ie la **chambre de compensation (« clearing house »)**. Cette chambre joue le rôle d'intermédiaire (et assure le rôle de payeur en dernier ressort) entre acheteur et vendeur, ce qui évite les risques de contrepartie (même si une des parties fait faillite).

- la position de chaque agent est réglée sur une base quotidienne. En notant $F(t,T)$ le prix *futures*, l'acheteur du contrat encaissera (resp. décaissera) au jour j : $F(j,T)-F(j-1,T)$ si cette différence est positive (resp. négative).
  Pour permettre les règlements quotidiens, les agents doivent déposer des fonds minimums (= **dépôt de garantie** – *deposit* / *initial margin*) - qui ne doivent généralement pas être inférieurs à la fluctuation quotidienne maximale autorisée - sur un **compte de marge** auprès d'un **courtier** (intermédiaire). Les comptes de marge sont rémunérés au taux du marché monétaire. Ainsi, si l'agent doit décaisser en j, la différence $F(j,T)-F(j-1,T)$, son compte de marge est débité. A *contrario*, si le niveau minimum de marge est atteint, la marge initiale est rétablie : c'est l'**appel de marge.**



Remarque : calcul du tick avec un nominal de 1M euros et une période de 90 jours :

$$tick=\frac{1}{2}\times\frac{0{,}01}{100}\times 1{,}000{,}000\times\frac{90}{360}=12{,}5\ euros$$ (le contrat varie de 12,5 euros en 12,5 euros)

Exemple : Le 04/04, un agent achète un futures sur 100 unités d'ASJ pour un prix unitaire de livraison de $K(t)=365$ et une date de livraison au 31/05. Une marge initiale de 2000 est nécessaire. Un dépôt de garantie de 1500 est également requis. Le prix futures évolue comme suit :

Date	***4/04***	***5/04***	***6/04***	***7/04***	***8/04***	***9/04***
$F(t,T)$	365	362	359	364	365	367

Le 11/04, l'agent vend un contrat futures de mêmes caractéristiques. Son compte de marge aura évolué de la manière suivante :

Date	4/04	5/04	6/04	7/04	8/04	9/04
Flux : $100[F(j,T)-F(j-1,T)]$	0	-300	-300	+500	+100	+200
compte de marge AVANT correction	0	1700	1400	2000+500	2100	2200
Retrait de fonds (trésorerie)	-2000	0	-600	+500	+100	+200
compte de marge APRES correction	2000	1700	2000	2000	2000	2000

1400 < 1500 => **appel de marge**

122. Volume et importance économique.

Au printemps 2004, les volumes quotidiens des marchés à terme organisés en *futures* et options était de 4.700 Mds de $ dont plus de 80% était des *futures*. Leur rythme de croissance annuel moyen sur les 3 dernières années était de 28%. Les *futures* représente plus de 40% du volume global des marchés financiers.

123. Standardisation.

Les contrats sont standardisés et doivent comprendre :

- quantité d'ASJ par contrat (= **quotité**),
- **cotation** de l'ASJ,
- le pas de cotation (ie le **tick**),
- la **monnaie** de cotation,
- les variations journalières maximum et procédure en cas de **limit up** ou **limit down**,
- les **dépôts de garantie**,
- les **échéances** désignées de façon standard par une lettre de l'alphabet suivi du dernier chiffre de l'année. Ex. : H6 <=> mars 2006. Les plus fréquentes sont les échéances trimestrielles :
  - H : 1ère trimestrielle = mars
  - M : 2ème trimestrielle = juin
  - U : 3ème trimestrielle = septembre
  - Z : 4ème trimestrielle = décembre
- ainsi que : qualité (GB : grade) de l'ASJ, horaires d'ouverture, pénalités de retard, détails de livraison, etc.

13. Couverture, spéculation et arbitrage.

Les agents qui prennent des positions dans les marchés dérivés peuvent être classés en 3 catégories :

131. Couverture (hedgers).

Les agents sont exposés à des risques de variations de l'ASJ => ils souhaitent réduire cette exposition au risque.
Ex. : risques de change, de tx d'intérêts, de cours du pétrole, etc.

132. Spéculation (bulls and bears)

Les spéculateurs prennent volontairement une position risquée dans l'espoir de réaliser un profit. C'est notamment le cas des produits dérivés puisqu'il y a symétrie entre l'espoir de gain et le risque de perte.

Les spéculateurs qui parient sur la hausse de l'ASJ sont dits ***bulls*** (haussiers). Ceux qui parient sur la baisse sont dits ***bears*** (baissiers).

133. Arbitrage.

On dit qu'un marché financier présente une **opportunité d'arbitrage** (« **arbitrage opportunity ou free lunch** ») lorsqu'on peut mettre en oeuvre une stratégie d'achat et de vente qui ne coûte rien et rapporte des gains > 0 (aujourd'hui ou plus tard).
Mais ceci est peu réalisable en pratique, de sorte que l'on fait souvent l'hypothèse qu'il y a **absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)** => faire un **raisonnement par arbitrage <=> raisonnement par l'absurde**.

Les **arbitragistes** ont pour mission de générer des profits sans risque en exploitant les irrégularités du marché concernant les relations entre les prix. Leur intervention rapide rétablit le prix théorique et le prix observé au même niveau. Ainsi, toute opportunité d'arbitrage ne peut être que **ponctuelle**

II. Les contrats à terme.

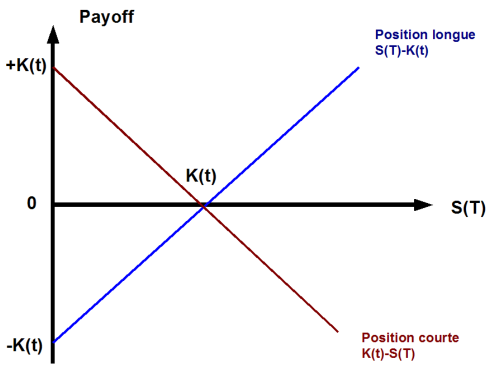
21. Sur le marché OTC : contrats *forward*

221. Généralités.

Soit **T** la date d'échéance du forward (**maturité**), $K(t)$ le prix de livraison à la date t (termes du contrat) et $f(t,T)$ le prix en date t. Lorsque le contrat est signé, on a : $K(t)=f(t,T)$

Par la suite, $f(t,T)$ évolue au cours du temps selon un **cours** $S(t,T)$.

A l'échéance du contrat, le profil de gain (on parle de **position de l'agent**) est $S(T)-K(t)$ => on parle de **position longue** (qui s'apprécie si le cours augmente).
Pour le vendeur, le profil de gain est : $K(t)-S(T)$ (**position courte**).
A l'échéance, le dénouement du contrat fait souvent l'objet d'un règlement par espèces (cash settlement). L'ASJ n'est pas livré physiquement, seule la valeur en espèce du contrat est transférée.



Remarque : une **position** est bien un engagement pris sur le marché. Ainsi, le fait de **retourner sa position** signifie que l'on passe d'une position longue à une position courte, et inversement.

222. Prix *forward*.

On formule les **hypothèses** :

- l'ASJ ne produit pas de revenus (ex. : dividendes ou coupons),
- tous les investisseurs peuvent prêter et emprunter à échéance T au tx annuel sans risque r,
- il y a AOA

La stratégie suivante (= ***cash and carry***) permet de déterminer le prix forward $f(0,T)$ en AOA :

à t = 0 le portefeuille est :

opération	*Cash flow*
Achat d'un ASJ	-S(0)
Financement par emprunt sans risque	+S(0)
Vente d'un forward au prix de $f(0,T)$	
TOTAL	0

à t = T le portefeuille est :

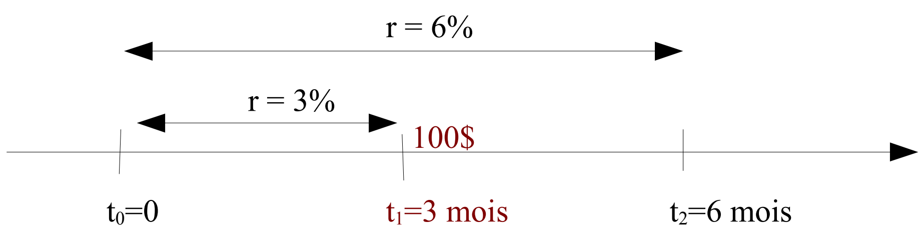
opération	*Cash flow*
Détention d'un ASJ	+ S(T)
Remboursement de l'emprunt	$-S(0)(1+r)^T$
Valeur du forward	$f(0,T)-S(T)$
TOTAL	$f(0,T)-S(0)(1+r)^T$

En AOA, ce portefeuille en T soit être nulle => $\boxed{f(0,T)=S(0)(1+r)^T}$ (intérêts composés).

<u>**Rq.**</u> : Nous avons une formule pour les tx d'intérêt composés. Sur une **période courte**, on fait intervenir le tx d'intérêt simple qui nous donne : $\boxed{f(0,T)=S(0)(1+i\times T)}$

223. Forward-Forward.

Supposons qu'à t_0, une entreprise A sait qu'elle empruntera à t_1 une somme de 100$ qu'elle remboursera en t_3.
Elle s'adresse à l**a banque B qui lui garanti en t_0 de lui prêter le montant en t_1 selon un taux fixé dès à présent : A et B signe un contrat FF** (sur le marché OTC) dans lequel ce taux est mentionné. La question est de savoir quel doit être ce taux pour que la banque couvre cette opération. En effet, si le tx du marché augmente, la banque est en risque car elle aurait pu prêter à un tx supérieur.



<u>Couverture :</u>

à t = 0 :

- A et B signent un FF,
- afin de disposer de 100$ de liquidité au profit de A, la banque B prête sur le marché à 3 mois un

montant qui lui donnera 100$ dans 3 mois ie : $\dfrac{100}{1+3\times\dfrac{90}{36000}}=99{,}2556$

- pour avoir ce flux, la banque emprunte sur le marché à 6 mois.

à t_1 : la banque reçoit le produit du prêt ie 100$ et le prête au client A.

à t_2 :

- la banque rembourse son prêt ie $99{,}2556\times(1+6\times\dfrac{180}{36000})=101{,}2407$,
- Par conséquent, la banque réclame cette somme au client A.

A a donc emprunté 100$ sur 3 mois et rembourse 101,2407. Le tx FF ou TFG (tx futur garanti) est tel que : $101{,}2407=100\times(1+TFG\times\dfrac{90}{36000})$ ssi $TFG=(\dfrac{101{,}2407}{100}-1)\times\dfrac{36000}{90}=4{,}9628$

Formule générale pour un FF: $\boxed{TFG=\dfrac{1+tx\,long}{1+tx\,court}-1}$

Les opérations FF sont assez rares dans la réalité car elles manquent de souplesse (les 2 parties ne peuvent pas changer d'avis). De plus, la banque prend un risque sur le nominal du prêt futur.
Pour pallier ces inconvénients, les intervenants utilisent plutôt les contrats FRA.

224. Le FRA (forward rate agreement).

C'est un accord de gré à gré entre 2 parties garantissant un tx d'intérêt sur un emprunt ou un placement (éventuel) futur sur le marché monétaire de 1 mois à 1 an. Contrairement au FF, l'opération est dissociée de la mise en place effective de l'emprunt ou du prêt : il n'y a pas de mouvements de fonds => **le FRA est une opération hors bilan.**

Couverture :

- un emprunteur figera le coût de son endettement futur en achetant un FRA (protection contre la hausse des tx),
- un prêteur s'assurera un tx de placement garanti en vendant un FRA (protection contre la baisse des tx).

Caractéristiques du contrat :

- acheteur et vendeur
- le **montant notionnel** (ie montant sur lequel porte l'opération),
- la date de négociation t_0,
- la date d'échéance t_1 et la date t_2 de maturité,
- le tx de référence (ex. Euribor 3,6,9 ou 12 mois),
- le TFG.

L'échéance du FRA correspond à la date de départ t_1 de la garantie qui est aussi la date de mise en place de l'opération sous-jacente d'emprunt ou de placement. A cette date, la valeur du tx de référence est comparée au tx garanti : le montant versé à l'acheteur du FRA par le vendeur est alors :

$$\boxed{versement\ à\ l'acheteur=Nominal\times\frac{tx\ de\ référence-TFG}{1+tx\ de\ référence}}$$

Ex du § précédent :

A (le client) et B (la banque) signent un FRA au lieu d'un FF :

- B ne s'engage plus à prêter mais il s'engage simplement sur le tx de l'éventuel prêt,
- A ne s'engage plus à emprunter mais il s'engage sur le tx futur de l'éventuel emprunt.

à t=0 : A et B se mettent d'accord sur les conditions du FRA. Le TFG est déterminé.

à t_1 : le tx pour la période t_1 à t_2 est constaté :
- si ce tx est > TFG => B paie la différence à A (car A est obligé d'emprunter à un tx plus élevé mais il reçoit de l'argent de B qui compense la différence d'intérêt).
- si ce tx est < TFG => A paie la différence à B.

Rq. : à la différence d'un FF, le FRA permet de purement spéculer (puisqu'il n'y a pas obligation de prêter ou d'emprunter).

Notations : FRA 2/9 à 4% – 4,25% signifie « FRA à échéance 2 mois et de maturité 9 mois dont la cote s'élève à 4% en offre (***bid***) et 4,25 en demande (***ask***) ».
ex. : si j'achète un FRA (c'est comme si je me préparait à un emprunt futur), j'applique le taux 4,25%. Si je vends un FRA (c'est comme si je me préparait à un prêt futur), j'applique le taux 4%.

22. Sur le marché organisé : les contrats IBOR 3 mois.

221. Généralités.

Il existe 3 grands contrats sur des taux interbancaires **en blanc** (ie non gagés) à 3 mois **offerts** (**IBOR 3 mois**) :

- celui sur Libor dollar 3 mois du *Chicago Mercantile Exchange*, coté également à Londres sur le Liffe en heure européeenne et à Singapour et sur le Simex en heure asiatique,
- celui sur l'Euribor 3 mois du Liffe;
- celui sur le Libor 3 mois livre sterling du Liffe,

Le **sous-jacent** est le taux IBOR à 3 mois tel que mesuré et publié le dernier jour de cotation du contrat. De façon à éviter des manipulations de cours, et plus généralement éviter d'interférer avec la mesure de l'IBOR, la cotation prend fin quelque temps - au moins une heure - avant celle-ci.

Comme tous les taux IBOR, le taux mesuré est un taux **spot** en J+2.

Exemple : si le dernier jour de cotation est le mardi 14 mars, il court donc du jeudi 16 mars au vendredi 16 juin, soit 92 jours.

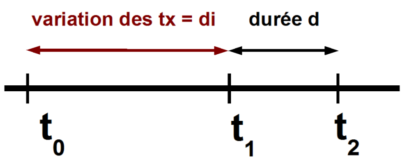
En revanche, si le dernier jour de cotation avait été le 15 mars, le taux n'aurait pu être été celui du 17 mars au 17 juin car le 17 juin tombe un samedi. La convention appliquée est alors, sauf exception, de décaler l'échéance au jour ouvré suivant, en l'occurrence le lundi 19 juin, et le taux IBOR mesuré sera alors un taux à 94 jours.

Rq. : le taux est bien sûr établi suivant les usages du marché monétaire en question. Pour le Libor, il est calculé sur une base annuelle de 365 jours. Pour tous les autres taux IBOR, il est calculé sur une base annuelle de 360 jours.

223. Le contrat Euribor 3 mois (E3M)

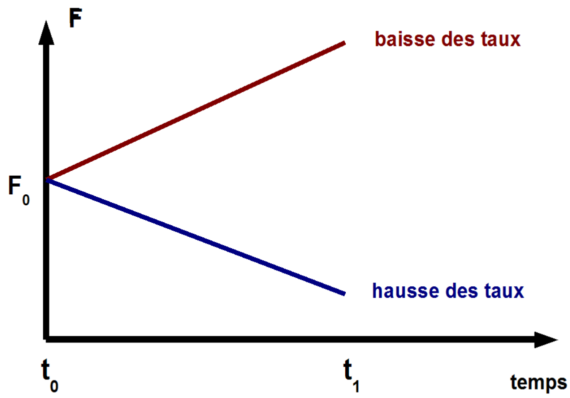
223-1. Définition.

On se donne 3 dates t_0, t_1, t_2 et on imagine que l'on souhaite faire un emprunt (resp. un prêt) entre les instants t_1, et t_2. au taux E3M On possède des contrats E3M dont le cours (ie la valeur) est donné (par définition) par la relation : $\boxed{F = 100 - impo}$ (1) où impo est un tx in fine appelé **taux implicite du contrat.**



Remarques : 1/ un cours de 97,805 correspond à un taux implicite (impo) de 2,195%.
2/ Le taux E3M est **prédéterminé** (ie connu à t_1) et **postcompté** (ie payé à t_2).

La relation (1) conduit au graphe suivant :



223-2. Exemple de contrat E3M.

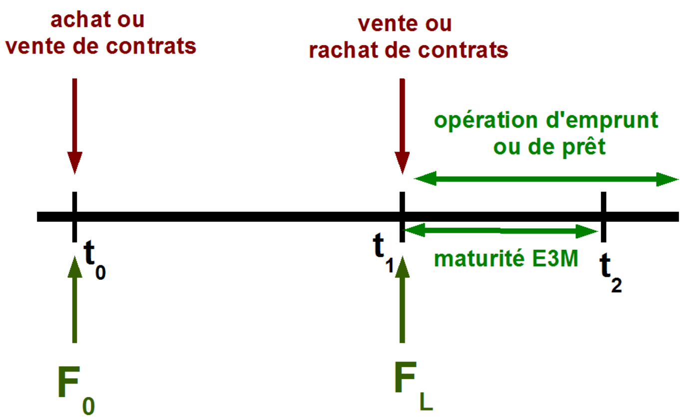
Taille du contrat	€ 1,000,000
Cycle (= échéances)	March, June, September, December, and four serial months, such that 24 delivery months are available for trading, with the nearest six delivery months being consecutive calendar months
Cotation	100.00 minus rate of interest *ie 100 – tx d'intérêt avec 3 décimales (tjrs)*
Echelon minimum de cotation	0.005 (€12.50) ie ½ pb = 1 tick
Dernier jour de trading (négociations)	10.00 - Two business days prior to the third Wednesday of the delivery month *ie 2ème jour de bourse précédent le 3ème mercredi du mois d'échéance du contrat à 10h00.*
Date de livraison	First business day after the Last Trading Day *1er jour suivant de dernier jour de négociation (J+1)*
Heures de cotation	07:00 – 21:00
Documentation	hort Term InShort Term Interest Rate Contracts
Mis à jour	18/08/04

Exemple : le contrat Euribor fait un million d'euros de nominal. S'il passe de 97.805 à 97.825, soit 0.02%, le gain ou la perte sera donc par contrat : **1.000.000 x 0.02% x 90/360 = 50 €**

223-3. Couverture du risque de taux.

Quels sont ces risques ?

- Si les taux montent et que je suis emprunteur futur => il y a perte => je dois donc **vendre** des contrats E3M à t_0 et les racheter à t_1 pour compenser cette perte.
- Symétriquement, si les taux baissent et que je suis prêteur futur => il y a perte => je dois donc **acheter** des contrats E3M à t_0 et les revendre à t_1 pour compenser cette perte.



Question **: combien de contrats faut-il vendre pour compenser la perte ?**

Supposons que les taux grimpent => F diminue.

- **étape 1** : calcul de la variation du montant des intérêts : $\boxed{dI = N * \frac{d}{360} * 1\% * di}$

  où **N est le nominal** et di la variation du taux E3M.

  étape 2 : le contrat perd de la valeur entre t_0, et t_1 => $F_0 > F_L$, en les revendant maintenant à t_0 je récupère : $\boxed{dV = (F_0 - F_L) * 1\,\bar{M}\,€ * 1\% * \frac{90}{360} * n}$ où **n est le nombre de contrats.**

Pour avoir une **couverture**, il faut et il suffit que $\boxed{dV = dI}$

$$\text{soit : } \quad \frac{N * \frac{d}{360} * di}{(F_0 - F_L) * 1\text{M}€ * \frac{90}{360} * n} = 1$$

or $F_0 - F_L = impo_L - impo_0 = dimpo$ d'où le nombre de contrat : $n = \frac{N * d * di}{1\text{M}€ * 90 * dimpo}$

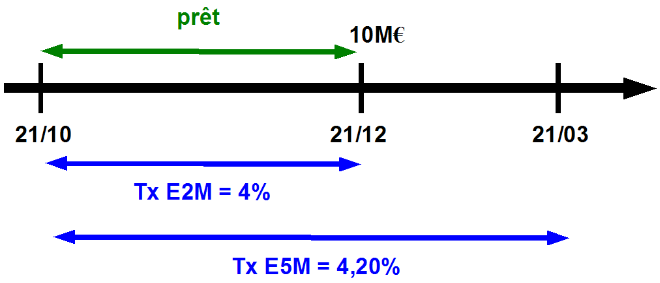
si on se situe sur des maturités proches de 3 mois (càd i calculé sur une période proche de 3 mois), alors on peut supposer que : $\boxed{\frac{di}{dimpo} = 1}$

dans ce cas : $\boxed{n = \frac{N}{1\text{M}€} * \frac{d}{90}}$

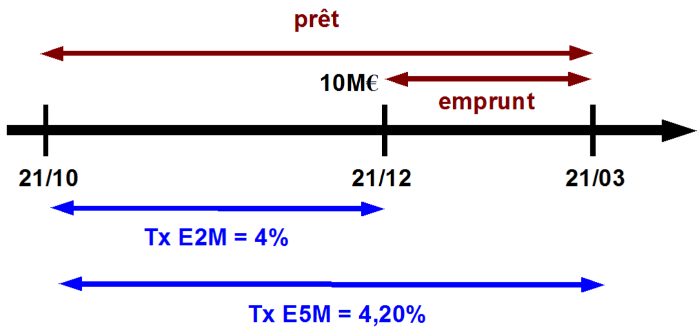
223-4. Taux Isy et Arbitrage (cash & carry / reverse cash & carry).

A/ Prêt et emprunt synthétique.

Soit un opérateur qui dispose de liquidités le 21/10 et souhaite les placer jusqu'au 21/12 pour obtenir à cette date un capital de 10M€. Les **taux** E2M et E5M s'élèvent respectivement à 4% et 4,20%. Le **contrat** E3M éch. DEC (R/L le 21/12) cote 97,650.



Un prêt synthétique est l'opération suivante :



il faut ensuite couvrir l'opération future (ie d'emprunt) par la vente de $n=\frac{10M€}{1M€}*\frac{90}{90}=10$ contrats E3M éch. DEC. On calcule $impo_0=100-97,650=2,350\%$

<u>Etude du portefeuille :</u>

➤ **le 21/10 :**

capitalisation de 10M€ entre le 21/12 et le 21/03 (attention : on utilise le taux couvert i_c

- vente de 10 contrats E3M d'échéance DEC,
- prêt d'une somme de $10M€*\frac{1+impo_0*1\%*\frac{90}{360}}{1+4{,}20*1\%*\frac{150}{360}}=9{,}885{,}749€$

actualisation de cette somme au 21/10

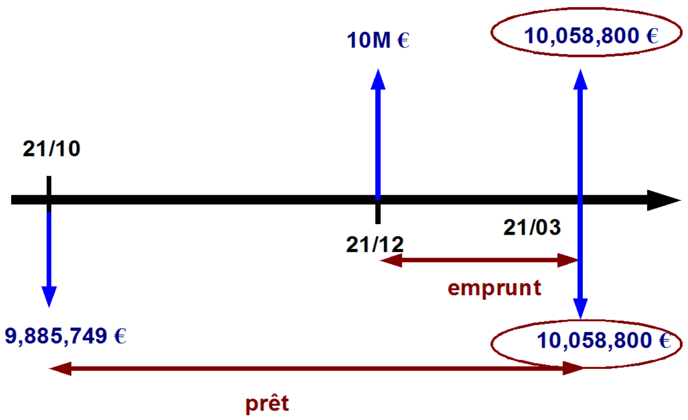
➤ **le 21/12 :**

- emprunt de 10M€ au taux i_c = $impo_0$,
- rachat de 10 contrats E3M

➤ **le 21/03 :**

- perception des intérêts du prêt : $10M€*(1+impo_0*1\%*\frac{90}{360})=10{,}058{,}800€$
- remboursement de l'emprunt : $10M€*(1+impo_0*1\%*\frac{90}{360})=10{,}058{,}800€$

En définitive, nous obtenons :



Tout ce passe comme si l'agent avait placé 9,885,749 € du 21/10 au 21/12 pour un taux baptisé **taux Isy** tel que :

$$9{,}885{,}749\,€ * (1 + Isy * 1\% * \frac{60}{360}) = 10M\,€ \quad \text{soit :} \quad isy = (\frac{10M\,€}{9{,}9885{,}749\,€} - 1) * \frac{360}{60} = 6{,}93\% > 4\%$$

Ici, le taux Isy est supérieur au taux du marché monétaire => il est ici plus intéressant.

Généralisation de la formule :

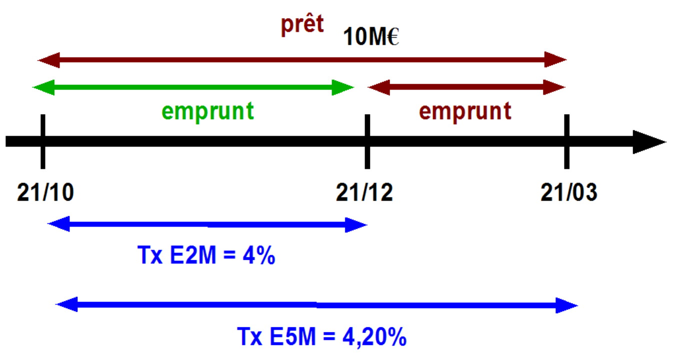
à ne pas oublier ! (1% = 1/100)

$$isy = \frac{1 + \text{taux long}}{1 + impo} - 1 = \left[\frac{1 + 4{,}2 * \frac{150}{360} * \frac{1}{100}}{1 + 2{,}35 * \frac{90}{360} * \frac{1}{100}} - 1 \right] * \frac{360}{60} = 0{,}06934 = 6{,}934\,\%$$

(formule semblable au TFG)

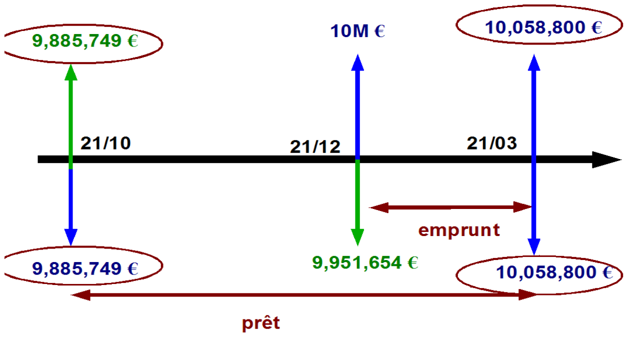
B/ Arbitrage.

Il suffit d'ajouter au prêt synthétique ci-dessus un emprunt tel que l'opérateur ne décaisse aucun fonds en t=0:

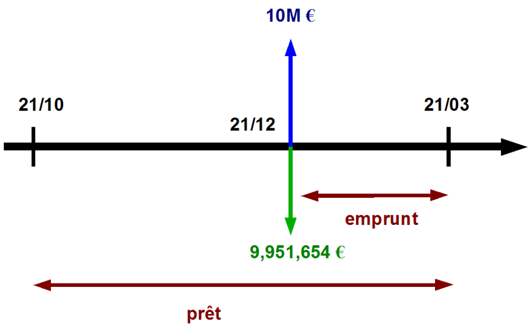


Le 21/10, l'opérateur emprunte la somme à prêter, ie : 9,885,749 € au taux E2M à 4% => le 21/12, il doit rembourser : $9{,}885{,}749\,€ * (1 + 4\% * \frac{60}{360}) = 9{,}951{,}654\,€$

On obtient :



ce qui équivaut à :



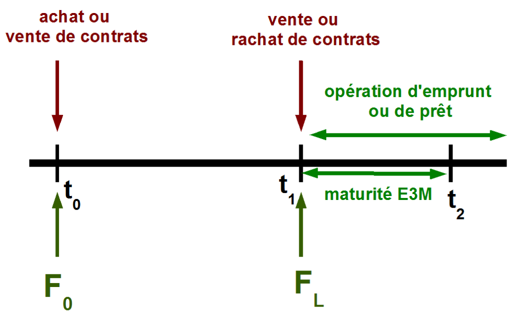
=> opération d'arbitrage qui permet à l'opérateur de gagner 10M€-9,951,654€ = **48,346€** avec un **profit d'arbitrage** de :

$$\left(\frac{48,346\,€}{10M\,€}\right)*\frac{60}{360}=2,93\,\%=isy-\text{taux marche monetaire}\,(\textit{ici : taux E2M})$$

Bilan :

Si $isy>$ taux marche monetaire => opération d'arbitrage **cash & carry.**
Si $isy<$ taux marche monetaire => opération d'arbitrage **reverse cash & carry.**

Revenons au graphe ci-contre :



- à t_0 : l'agent achète l'ASJ sur le marché monétaire (cash) et revend le contrat simultanément (donc à découvert) sur le marché à terme.
- Il porte le titre entre t_0 et t_1, ie jusqu'à l'échéance (carry).

=> c'est une **stratégie cash & carry.**

A contrario : achat à t_0 du contrat : **reverse cash & carry.**

224. Le contrat Bund (instruments longs)

224-1. Définition.

Taille du contrat	€ 100,000
ASJ	Obligations de l'Etat allemand (Bund) de maturité comprise entre 8,5 et 10,5 ans, remboursables in fine servant un intérêt annuel de 6%
Cycle	2 échéances trimestrielles du cycle March, June, September, December
Cotation	En pourcentage du nominal avec **2 décimales** *comme pour les obligations*
Echelon minimum de cotation	€ 10.00 ie 1 pb
Dernier jour de trading (négociations)	2 jours de bourse précédant le jour de livraison à 12h30 (ETC) *voir graphe en bas de page*
Date de livraison	10ème jour calendaire du mois de livraison, ou à défaut, le 1er jour de bourse qui suit.

Les intérêts annuels de 6% sont beaucoup trop élevés par rapport à la réalité (le taux réel se situe aux environs de 5%) => l'ASJ n'existe pas => il faut trouver sur le marché un ASJ qui s'en rapproche afin d'assurer l'obligation de livrer (c'est un futures !). C'est ce que l'on appelle une **parité d'échange.** En réalité, c'est quasiment impossible : les titres qui se « rapprochent » de l'ASJ figurent dans une liste (appelée **gisement**) fournie par la chambre de compensation.

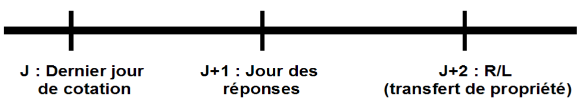
Exemple de gisement :

Euro Bund ***échéance DECEMBRE 2005***		
Dernier jour de transaction .... Jour R/L		8 décembre 2005 12 décembre 2005
Valeur du gisement	CF	Intérêts (en €)
Bund 4,250% 4 jul 2014 DE0001135259 **Code international (ISIN) identifiant les titres (DE=deutchland)**	0.885160	1,874.66
Bund 3,750% 4 jan 2015 DE0001135433 **Échéance (date à laquelle il y a détachement de coupon)**	0.846069	3,913.29
Bund 3,250% 4 jul 2014 DE0001135259 **Valeur de c**	0.803899	1,834.25 CCL = coupon couru

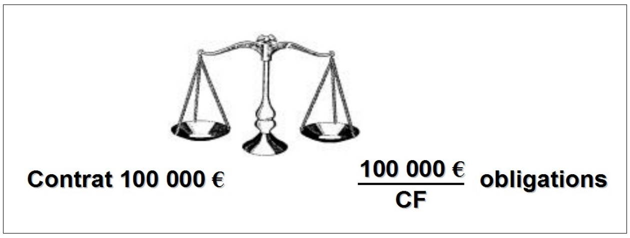
Remarques : - le règlement livraison est de **2** jours en Allemagne (dans l'exemple : 4 jours car week end inclus).

- les détachements de coupons ont toujours lieu les 4 juillet

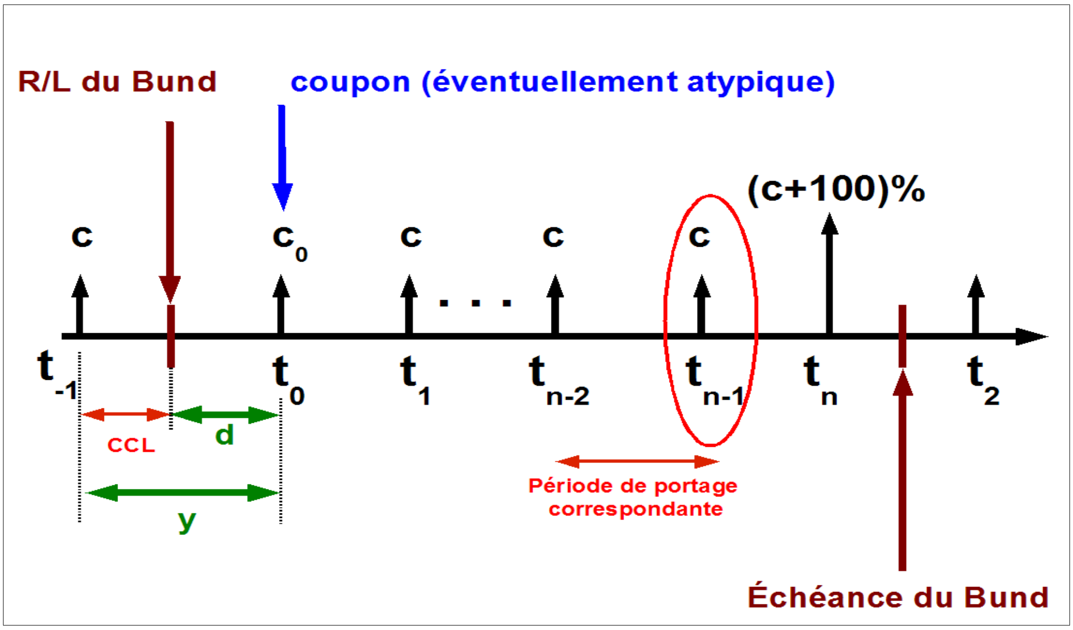
A J+1, les vendeurs doivent annoncer la nature du titre qu'ils vendent.



224-2. Calcul du facteur de concordance CF.



Objectif : établir une parité d'échange entre un titre fictif (le notionnel) et un titre réel (le titre à livrer) => le facteur de concordance d'un titre du gisement est donc la **valeur actuelle** (ie le **cours** actuel et non le prix) **du titre (obligation) pour un taux d'actualisation égal à celui du notionnel (6%).**



$$\text{prix au prochain coupon} = \left(c_0 + \frac{c}{1{,}06} + \frac{c}{1{,}06^2} + \ldots + \frac{c}{1{,}06^{n-1}} + \frac{100+c}{1{,}06^n}\right) * \frac{1}{1{,}06^{\frac{d}{y}}} \quad (1)$$

La perception du coupon c_0 correspond à une période de portage y , il faut donc le ramener à une période d :

Calcul du coupon couru (CCL) : c ↔ y

CCL ↔ y-d

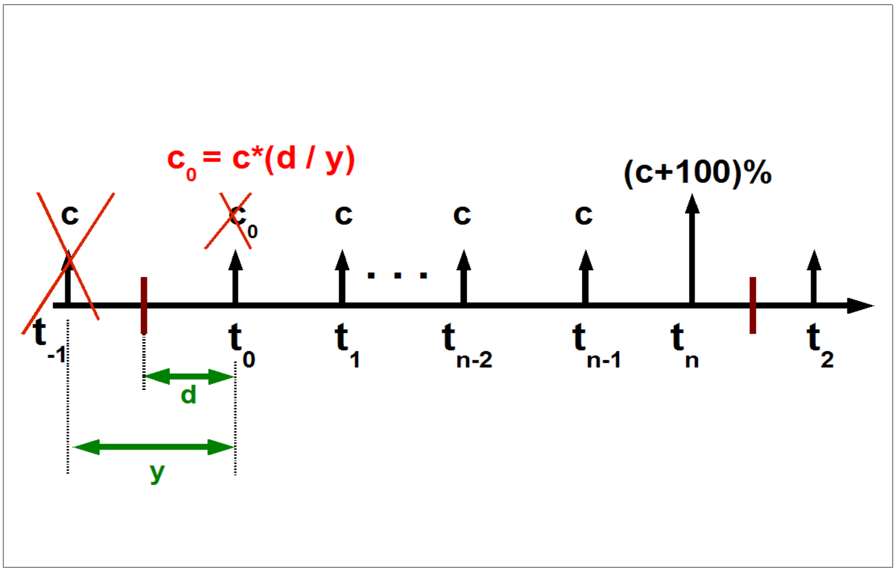
$$\boxed{CCL = c\frac{y-d}{y}} \quad (2)$$

On en déduit :
$$CF = \underbrace{\left(c_0 + \frac{c}{1{,}06} + \frac{c}{1{,}06^2} + \ldots + \frac{c}{1{,}06^{n-1}} + \frac{100+c}{1{,}06^n}\right)\frac{1}{1{,}06^{\frac{d}{y}}}}_{\text{valeur de l'obligation à } t_{-1}} - CCL$$

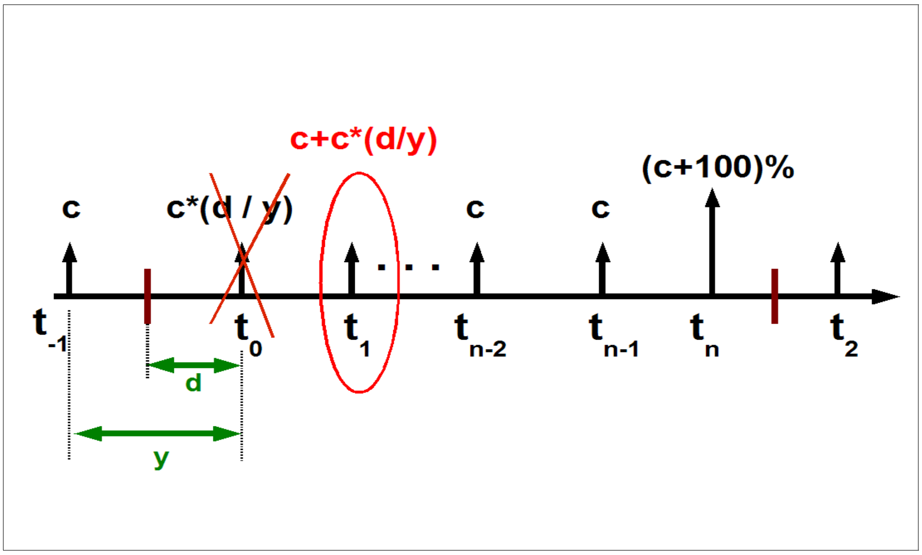
soit :
$$\boxed{CF = \left(c_0 + c\frac{1-1{,}06^{-n}}{0{,}06} + 100 * 1{,}06^{-n}\right) 1{,}06^{-\frac{d}{y}} - CCL}$$

Rq. : CCL est parfois noté AI

Du point de vue du « porteur » du titre obligataire :



Attention : on a parfois un coupon atypique pouvant être versé à une date différente de la date annuelle habituelle :



224-3. Prix de livraison

Lorsque le vendeur d'un contrat Bund livre un titre du gisement, il reçoit en échange le prix de livraison qui est :

Prix = cours + coupon couru

Pour un **nominal de 100**, il touche : $\text{Prix} = \underbrace{CF * F_L}_{\text{cours du contrat}} + \underbrace{CCL}_{\text{coupon couru}}$ (CF est donné en ***pourcentage***)

Donc, pour un **nominal de 100,000 €**, le montant dû est :

$$MD = \frac{(CF * F_L + CCL) * 100{,}000}{100} = 1000(CF * F_L + CCL) \quad (1)$$

Mais, pour livrer le titre, le vendeur doit se le procurer sur le marché et en payer le prix => il les achète sur le marché au comptant au prix : $\frac{(S_0+CC_0)*100{,}000}{100}=1000(S_0+CC_0)$ (2) avec **S_0 le cours « Spot »** (en pourcentage) et CC_0 le coupon couru.

Le **jour de liquidation**, on doit donc avoir (1)=(2) => $1000(CF*F_L+CCL)=1000(S_0+CC_0)$
Or, les intérêts courus sont identiques, ie $CCL\approx CC_0$ car calculés à la même date.

Conclusion : $S_0\approx CF*F_L$ (c'est le **cours ajusté**)

En pratique, il n'y a jamais égalité notamment parce que le calcul de CF est établi en faisant l'hypothèse d'un TRA=6%. Mais pour ce faire, il faut que le contrat ait un cours de liquidation de 100. En pratique, le cours de liquidation s'écarte de 100, d'où un bais.

Arbitrage :

- **Cas 1** : Supposons que $S_0<CF*F_L$: que faut-il faire?
  - acheter sur le marché Spot (« cash », « comptant »),
  - vendre sur le marché à terme (livraison),
  - donc encaisser : $-S_0+CF*F_L>0$ => **stratégie « cash & carry ».**

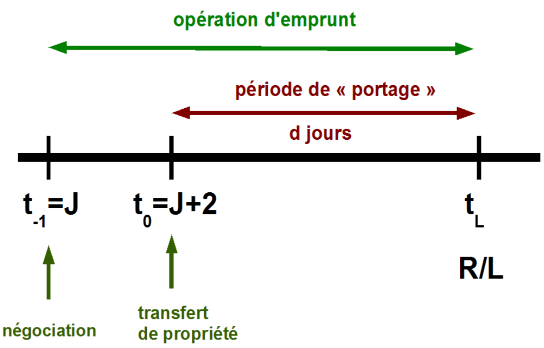
- **Cas 2** : Supposons que $S_0>CF*F_L$: que faut-il faire?
  - acheter sur le marché à terme,
  - vendre sur le marché Spot,
  - donc encaisser : $S_0-CF*F_L>0$

Or il est **interdit** de vendre à découvert sur le marché au comptant! => il n'y a **pas de stratégie d'arbitrage possible.**

Le cas 2 correspond à la réalité => il faut donc rechercher le titre le moins cher à livrer (***cheapest to deliver - CTD***) ie celui pour lequel le TOTAL (voir § 224-4) est le « moins négatif ».

224-4. Arbitrage « comptant contre terme ».

Soit la stratégie d'arbitrage « cash & carry » suivante : à t_{-1}=J, vente d'un contrat Bund de cours F_0 dont les caractéristiques du gisement indiquent un coupon couru AI; achat sur le marché Spot de l'ASJ ie le Bund de cours S_0. Pour financer ce projet : emprunt sur le marché monétaire au taux r_e.



N.B. : Le transfert de propriété est effectif à t_0=J+2

à t_0 :

- vente d'un contrat Bund
- achat spot d'un ASJ (ie titre du gisement) : $-(S_0+CC_0)$
- financement par emprunt : $+(S_0+CC_0)$

TOTAL **= 0**

à t_L :

- réception du prix de livraison : $CF*F_L+CC_L$
- remboursement d'emprunt : $-(S_0+CC_0)(1+r_e*\frac{d}{360})$
- **marge cumulée sur les contrats** : $\underbrace{CF*F_0}_{\text{Le contrat est vendu à la date de R/L au prix fixé à } t_0}-\underbrace{CF*F_L}_{\text{Et vaut } CF*F_L \text{ en T (R/L)}}=CF(F_0-F_L)$
- **perception des coupons pendant la période de portage** : +c'

$$\textbf{TOTAL} = CF*F_L+CC_L-(S_0+CC_0)(1+r_e\frac{d}{360})+CF(F_0-F_L)+c'$$

$$= \boxed{\underbrace{(CF*F_0-S_0)}_{\text{prix à terme – prix spot = \textbf{base}}}+\underbrace{(CC_L+c'-CC_0)}_{\text{coupons reçus pour avoir porter le titre = \textbf{rémunération}}}-\underbrace{(S_0+CC_0)(r_e\%)\frac{d}{360}}_{\text{intérêts d'emprunt = \textbf{coût du financement}}}}$$

En AOA on a : TOTAL = 0 => $F_0:=F_0^*$ est le **cours théorique du contrat** tel que :

$$(CF*F_0^*-S_0)+(CC_L+c'-CC_0)-(S_0+CC_0)r_e\frac{d}{36000}=0 \quad (3)$$

ssi : $$\boxed{F_0^*=\frac{S_0+(S_0+CC_0)r_e\frac{d}{36000}-(CC_L+c'-CC_0)}{CF}} \quad (4)$$

avec r_e ***en pourcentage.***

On remarque que $CF*F_0^*$ est un prix à terme qui se décompose en deux membres :

$$\underbrace{S_0}_{\text{Prix cash (spot)}}+\underbrace{(S_0+CC_0)r_e\frac{d}{36000}-(CC_L+c'-CC_0)}_{\text{Coût de portage}}$$

<u>Interprétations :</u>

1. Si $CF*F_0<S_0$ => coût de portage négatif

2. Si de plus **AOA** => $(CC_L+c'-CC_0)-(S_0+CC_0)r_e\frac{d}{36000}>0$ => je touche plus de coupons que cela me coûte d'emprunter.

3. **Si R<0** => la stratégie « cash & carry » est perdante => il faudrait inverser les positions et passer en reverse or ce n'est pas possible en raison de l'interdiction de vente à découvert sur le marché cash Il faut donc calculer le TOTAL pour les différents titres du gisement et déterminer le CTD.

Propriété 1 : La formule (4) permet de calculer le cours théorique F_0^* . On compare ce cours au cours du marché à terme F_0

- Si $F_0^* < F_0$ on applique la stratégie gagnante « cash & carry »
- Si $F_0^* > F_0$ on recherche le CTD

4. On définit le **Taux Equivalent de Réméré Monétaire (TERM)** le taux équivalent associé à la stratégie (obtenu à partir de la formule 3 en substituant r_e par TERM) :

$$TERM = \frac{(CF * F_0^* - S_0) + (CC_L + c' - CC_0)}{S_0 + CC_0} * \frac{360}{d} \quad (5)$$

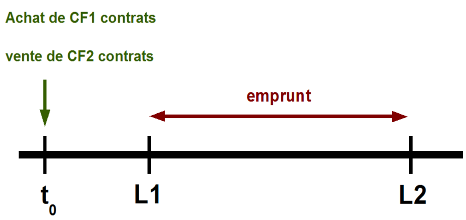
Le TERM désigne donc le taux maximum auquel on peut emprunter. Il s'agit également de la rentabilité d'investissement.

Propriété 2 : La formule (5) permet de calculer le TERM. On compare ce taux au taux d'emprunt r_e

- Si $TERM > r_e$ on applique la stratégie gagnante « cash & carry »
- Si $TERM < r_e$ on recherche le CTD

224-6. Arbitrage terme contre terme (voir exo 9)

Lorsque (à un moment donné) l'écart entre les prix de 2 contrats est trop ou trop peu important, les arbitragistes peuvent profiter de cette situation en mettant en place des stratégies d'arbitrage « terme contre terme » par la vente d'une échéance et l'achat simultané d'une autre.



Condition : il faut que les 2 CTD soient les mêmes

Arbitrage : soit L1 et L2 les échéances des 2 contrats avec **L1 < L2**

- achat de CF1 contrats
- vente simultanée de CF2 contrats
- emprunt permettant de couvrir l'achat des CF1 contrats entre L1 et L2 (au TFG par exemple)

224-7. Couverture du risque de taux.

- Si les taux montent et que je suis acheteur d'obligations (« long sur obligation ») => la valeur de l'obligation baisse (asymétrie) => il y a perte => je dois donc vendre des contrats Bund à t_0
 => le gain sur les contrats compense la perte de cash

- Symétriquement, si les taux baissent et que je suis court sur obligations => la valeur de l'obligation augmente => il y a perte (car la dette augmente) => je dois donc **acheter** des contrats Bund à t_0
 => le gain sur les contrats compense la perte de cash

La question est donc de savoir combien de contrats il faut négocier : on détermine le **ratio de couverture.**

1ère méthode (statistique) :

Il s'agit d'écrire que le gain sur les contrats compense la perte de cash selon un ratio de couverture h

$$\boxed{h = \frac{dS}{dF}}$$

dS : variation du portefeuille (perte)

dF : variation due aux contrats (gain)

La méthode statistique consiste à estimer le ratio de couverture h^* tel que $v = dS - hdF$ varie peu autour de h , ie h^* est tel que : $\partial_h Var(v) = 0$

$$\text{Or} \quad Var(v) = var(dS - hdV) = var(dS) + h^2 var(dF) - 2\text{hcov}(dS, dF)$$

en faisant apparaître le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{SF} = \dfrac{cov(dS, dF)}{\sigma_S \sigma_F}$

$$\text{il vient : } Var(v) = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2\text{h}\,\rho_{SF}\,\sigma_S\,\sigma_F$$

$$\text{d'où} \quad \partial_h Var(v) = 2\text{h}\,\sigma_F - 2\,\rho_{SF}\,\sigma_S\,\sigma_F = 0$$

$$\text{et donc : } \boxed{h = \rho_{SF}\frac{\sigma_S}{\sigma_F}}$$

<u>Remarques :</u>

- On calcule ces paramètres de manière statistique sur les données historiques de dS et dF sur des intervalles de temps de longueur constante. Théoriquement, ces intervalles devraient être les mêmes que la durée de couverture mais en pratique on retient des intervalles plus courts.

- Si $\rho_{SF} = 1$ la corrélation est parfaite. Si de plus dS et dF ont même volatilité alors le ratio est optimal. Si dF est 2 fois plus volatile que dS ($\sigma_F = 2\sigma_S$) et que la corrélation est parfaite alors $h = 1/2$ ce qui est conforme à la formule $h = \dfrac{dS}{dF}$

2ème méthode (analytique) :

Le problème de la méthode précédente est qu'elle nécessite de connaître les données historiques de dS et dF. On utilise le CTD pour lequel nous avons : $S_{CTD} = CF_{CTD} \times F$ => $dS_{CTD} = CF_{CTD} \times dF$

La sensibilité du CTD est $X_{CTD} = \dfrac{1}{r_{CTD}} \times \dfrac{dS_{CTD}}{S_{CTD}}$ où r_{CTD} est le TRA du CTD

$$\text{on en déduit : } dF = \frac{X_{CTD} \times S_{CTD} \times dr_{CTD}}{CF_{CTD}}$$

$$\text{On rappelle que : } Var(v) = var(dS) + h^2 var(dF) - 2\text{hcov}(dF, dS)$$

$$\text{qui donne par dérivation } \quad \partial_{hVar}(v) = 2\text{hVar}(dF) - 2\text{Cov}(dF, dS) = 0$$

donc : $$h=\frac{Cov(dF, dS)}{Var(dF)}=\frac{Cov(\frac{X_{CTD}\times S_{CTD}\times dr_{CTD}}{CF_{CTD}}, S_T\times X_T\times dr_{S_T})}{Var(\frac{S_{CTD}\times X_{CTD}\times dr_{CTD}}{CF_{CTD}})}$$

en simplifiant : $$h=CF_{CTD}\times\frac{S_T\times X_T}{S_{CTD}\times X_{CTD}}\times\frac{Cov(dr_{CTD}, dr_{S_T})}{Var(dr_{CTD})}$$

On suppose généralement : $\frac{Cov(dr_{CTD}, dr_{S_T})}{Var(dr_{CTD})}\approx 1$ car en pratique il y a évolution parallèle des taux de rendement actuariels (des titres à protéger et des titres de couverture)

On obtient donc : $$\boxed{h=CF_{CTD}\times\frac{S_T\times X_T}{S_{CTD}\times X_{CTD}}}$$ portefeuille

nombre optimal de contrats :

$\boxed{N=h\frac{V_N}{V_F}}$ avec V_N la valeur nominale du portefeuille à couvrir

et V_F la valeur du contrat (ie 100,000 € pour le Bund)

Implantation TI89

1. Calcul du TRA et de la sensibilité :

```
()
Prgm
¨programme de michael sibilleau
local i,j,N,d,V0,temp,temp,tempbis,tauxinf,tauxsup,milieu,resultat,S,reponse,x

Lbl debut

ClrIO
Disp  "************************","*   TRA sur obligations *","************************"

¨ boite de dialogue (requetes) :
¨------------------------------

Dialog
   Title  "Entrer les données suivantes"
   Request  "nbre échéances N ",N
   Request  "prochain coupon",d
   Request "V0",V0
EndDlog
expr(N)→N
expr(d)→d
expr(V0)→V0
newList(N)→F

¨ saisie des flux
¨---------------

For i,1,N
   Input "Entrez flux "&string(i),temp
   If (temp=0 and i>1) Then
      F[i-1]→tempbis
      tempbis→F[i]
   Else
      temp→F[i]
   EndIf
EndFor

¨ fonction d'"actualisation"
¨--------------------------

Define actua(V,taux,N,d)=Func
   local somme,i
   0→somme
   For i,1,N
      somme+F[i]/((1+taux)^(i-1))→somme
   EndFor
Return(V-somme/((1+taux)^(d/365)))
EndFunc

¨ calcul du TRA par dichotomie
¨----------------------------
0→tauxinf
1→tauxsup

while abs(tauxsup-tauxinf)>0.0001
```

```
(tauxinf+tauxsup)/2→milieu
  if actua(V0,milieu,N,d)<0
  Then
    milieu→tauxinf
  Else
    milieu→tauxsup
  EndIf
EndWhile
approx(milieu)→resultat
Disp "le TRA est :"&string(resultat)

¨ calcul de sensibilite
¨---------------------

0→S
For j,1,N
S+(1-j-d/365)*(F[j]/((1+resultat)^j))→S
EndFor
S/(V0*((1+resultat)^(d/365)))→x
Disp "sensibilite :"&string(x)

¨ boucle eventuelle sur le prog
¨------------------------------

Disp "relancer programme ?"
Input "oui=1",reponse
If reponse=1 Then
  Goto debut
EndIf

EndPrgm
```

2. Calcul de la valeur actuelle nette et de la sensibilité

```
()
Prgm
¨programme de michael sibilleau
local N,d,temp,TRA,i,j,k,V,S,x

Lbl debut

ClrIO
Disp  "*************************","*   Net Present Value *","*************************"

¨ boite de dialogue (requetes) :
¨------------------------------

Dialog
  Title  "Entrer les données suivantes"
  Request  "nbre échéances N ",N
  Request  "prochain coupon",d
  Request "TRA (en %)",temp
EndDlog
expr(N)→N
expr(d)→d
expr(temp)→temp
newList(N)→F
temp/100→TRA

¨ saisie des flux
¨---------------
```

```
For i,1,N
  Input "Entrez flux "&string(i),temp
  If (temp=0 and i>1) Then
    F[i-1]→tempbis
    tempbis→F[i]
  Else
    temp→F[i]
  EndIf
EndFor

¨ actualisation des flux
¨-----------------------

0→somme
For j,1,N
  somme+F[j]/((1+TRA)^(j-1))→somme
EndFor
somme/((1+TRA)^(d/365))→V

¨ calcul de sensibilite
¨----------------------

0→S
For k,1,N
  S+(1-k-d/365)*(F[k]/((1+TRA)^k))→S
EndFor
S/(V*((1+TRA)^(d/365)))→x

¨ affichage des resultats
¨------------------------

Disp "V0 : "&string(approx(V))
Disp "sensibilite :"&string(x)

¨ boucle eventuelle sur le prog
¨-------------------------------

Disp "relancer programme ?"
Input "oui=1",reponse
If reponse=1 Then
  Goto debut
EndIf

EndPrgm
```

Le marché des options

I. Généralités sur les options.

Une **option** est un **droit** (et non une obligation!) **d'acheter (call) ou de vendre (put) l'ASJ** à un prix fixé (= **prix d'exercice** ou ***strike*** noté **K**) à, ou jusqu'à une date fixée (= **échéance** ou ***expiry*** notée **T**) :

- Lorsque le droit d'exercice est valable jusqu'à l'échéance, les **options sont dites américaines**,
- Lorsque ce droit n'est valable qu'à l'échéance, les options sont **européennes**.

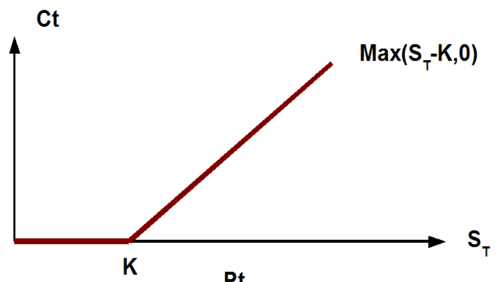
<u>**Ex.**</u> : soit une option d'achat européenne d'un baril de pétrole dans 1 mois à un prix fixé à l'avance de 20$. Soit S_t le cours dans un mois du baril. A t=T, on a le choix d'exercer ou pas l'option :
- si on l'exerce, on réalise un gain relatif de S_t-20 à condition que cette qté soit >0 (sinon c'est une perte),
- si on n'exerce pas l'option => ni gain, ni perte.

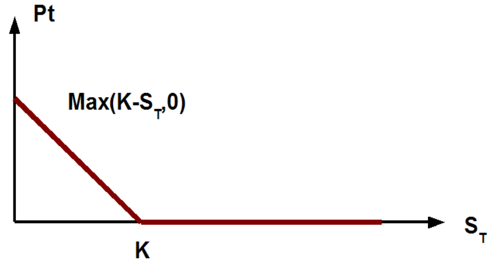
=> on ne réalise l'option que si l'on fait un bénéfice. Une option est donc une sorte de forward où on gagne à tous les coups puisqu'il n'y a pas obligation à l'exercer. En contrepartie, l'acheteur verse au vendeur une prime (premium).

<u>**Corollaire**</u> : Le **payoff du call** européen est : $C_t=max(S_t-K,0)$
Le **payoff du put** européen est : $P_t=max(K-S_t,0)$

$\forall t\leqslant T$, le **degré d'enjeu (moneyness)** de l'option est le flux auquel donnerait le droit cette option si elle était exercée immédiatement :

- si ce **flux est positif,** l'option est dite **dans la monnaie (in the money) ou en jeu**.
- lorsqu'il est **négatif**, l'option est dite **hors de la monnaie (out of the money) ou hors jeu**.
- lorsqu'il est **nul**, l'option est dite à **la monnaie (at the money)**.





Rq. : les options sont négociées de gré à gré ou sur le marché organisé :

- les options **OTC** peuvent être européennes, américaines (**options vanille –** ***plain vanilla options***) ou définies sur d'autres règles d'exercice (puisque non standardisées => ce sont des **options exotiques** - ou de seconde génération),

- les options négociées sur le marché organisé sont européennes et pour le plupart américaines.