

Théorie de la ruine

Bourges Mathieu - Dutang Christophe - Sibilleau Michaël

Mars 2007

La probabilité de ruine en temps fini en supposant des montants de sinistres entiers

étude de l'article de C. Lefèvre et P. Picard (1997)

Le but de ce travail est de caractériser le temps de ruine T (et plus précisément sa fonction de survie $P(T > x)$) lorsque les montants des sinistres sont discrets. Cette hypothèse n'est pas très contraignante en pratique puisque nous pouvons considérer des montants de sinistres en unité monétaire.

Sous cette hypothèse et en considérant que le temps de ruine est le temps de premier croisement entre un processus de Poisson Composé (coûts des sinistres) et une borne supérieure croissante, nous obtenons une formule explicite grâce aux polynômes d'Appell généralisés. On note que cette borne supérieure représente les ressources permettant à l'assureur de tenir ses engagements.

Dans une première partie, nous formalisons le problème puis nous étudions la distribution du temps de ruine T afin de l'exprimer comme une somme de polynômes. Ensuite, nous introduisons les polynômes d'Appell pour obtenir des formules explicites de $P(T > x)$ et enfin nous étudions un cas particulier du problème (linéarité de la borne supérieure).

1 Introduction

On considère le modèle classique en temps continu des compagnies d'assurance, le modèle Poisson composé. On note $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ le processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de sinistres et W_1, W_2, \dots leur montant successif. Ces montants sont supposés :

- indépendants et identiquement distribués.
- indépendants de $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$
- ayant une distribution $\{q_j, j \in \mathbb{N}\}$ de moyenne m .

Ainsi, au temps t , le montant des sinistres agrégés s'éleve à

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} W_i \quad (1.0)$$

et le surplus de l'assureur est donné par

$$R_t = u + ct - S_t \quad (1.1)$$

avec $R_0 = u \in \mathbb{N}$ le capital initial et c le montant des primes par unité de temps. On rappelle que par convention, on a :

$$\sum_{i=1}^0 W_i = 0$$

Nous allons examiner une situation plus générale en substituant $u + ct$ par une fonction h réelle, croissante, positive, définie sur \mathbb{R}^+ , et telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = +\infty .$$

Ainsi, on a

$$R_t = h(t) - S_t \quad (1.2)$$

h peut être considérée comme la fonction "des ressources de l'assureur" et peut ne pas être continue.

Dans ce cas, on définira h^{-1} par

$$h^{-1} = \text{Inf} \{y, h(y) \geq x\}.$$

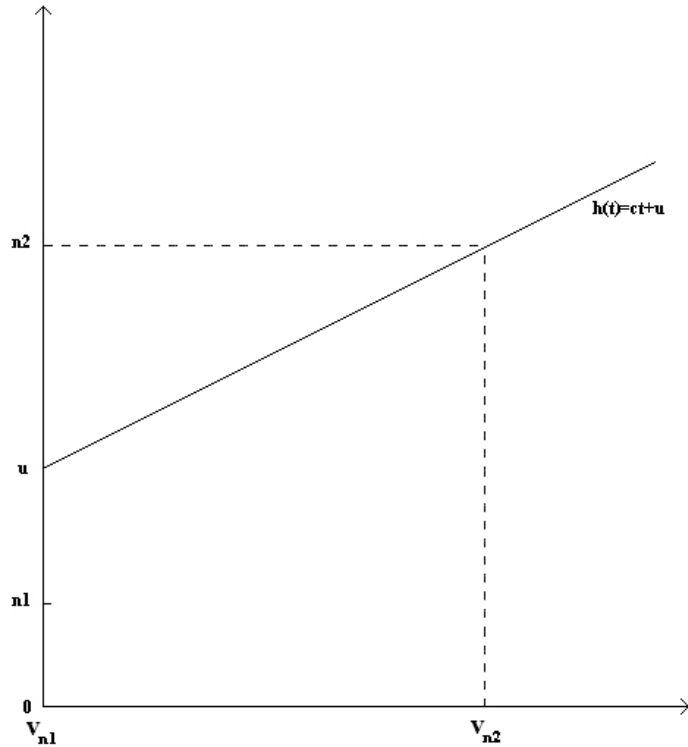
On pose $\forall n \geq 0 \quad v_n = h^{-1}(n)$ (1.3)

et on remarque que $v_0 = 0$ et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus croissant.

Dans le cas linéaire, avec $h(t) = ct + u$, on a

$$v_n = \text{Max}\{0, \frac{n-u}{c}\}$$

En effet, comme le montre le graphe suivant, si $n < u$ alors $v_n = 0$.



Ainsi,

$$v_0 = v_1 = \dots = v_u = 0 \text{ et } v_n = \frac{n-u}{c} \text{ pour } n > u$$

Le temps de ruine T est le premier temps de croisement de la trajectoire $t \mapsto S_t$ avec $t \mapsto h(t)$ (en excluant 0). Ainsi, le problème se ramène à un premier temps de croisement entre une trajectoire aléatoire et une borne supérieure déterministe.

Maintenant que nous avons posé le cadre du problème, nous cherchons à exprimer la probabilité de non ruine en fonction d'un certain type de polynômes.

2 Distribution du temps de ruine

Cette distribution est déféctive. Dans le cas de non-ruine, on pose $T = \infty$.

On pose

$$P_n(x) = P(S_x = n, T > x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

On a donc

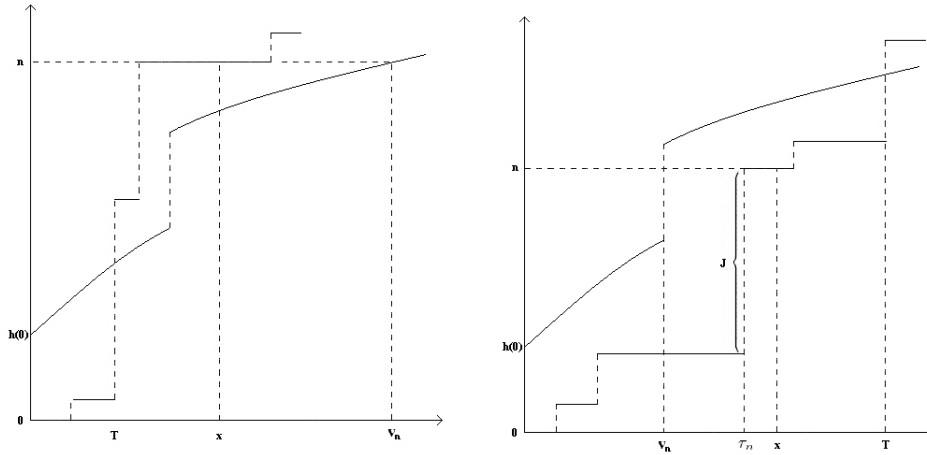
$$P_0(x) = P(S_x = 0) = P(N_x = 0) = e^{-\lambda x} \quad (2.2)$$

De plus, pour $n > 0$

$$P_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < v_n \\ \int_{v_n}^x \sum_{j=1}^n q_j P_{n-j}(t) \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt & \text{si } x \geq v_n \end{cases} \quad (2.3)$$

En effet, lorsque $x < v_n$, $S_x = n$ signifie qu'au temps x , la trajectoire a déjà croisé la borne supérieure et que donc le temps de ruine est déjà intervenu. Ainsi, l'évènement ($S_x = n$ et $T > x$) est impossible.

De plus, lorsque $x = v_n$, $P_n(x) = 0$.



Enfin, lorsque $x > v_n$, pour avoir simultanément les deux conditions nécessaires, il faut que le dernier sinistre précédent x arrive à un temps $\tau_n > v_n$.

Supposons maintenant que τ_n et J (intensité du saut correspondant) soient donnés et que la trajectoire ait atteint le niveau $n - J$ au temps τ_n (sans avoir croisé la borne

supérieure durant l'intervalle de temps $[0; \tau_n]$, le tout avec probabilité $P_{n-J}(\tau_n)$. Ainsi

$$\begin{aligned} P((T_x = n) \cap (x > v_n) \cap (\tau_n > v_n) | \tau_n, J) &= P_{n-J}(\tau_n) \\ E(E(\mathbf{1}_{(T>x) \cap (S_x=n) \cap (x>v_n) \cap (\tau_n>v_n)} | \tau_n, J)) &= E(P_{n-J}(\tau_n)) \\ P_n(x) &= \int_{v_n}^x E(\tau_n(t)) dt \\ P_n(x) &= \int_{v_n}^x \sum_{j=1}^n q_j P_{n-j}(t) \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt \end{aligned}$$

puisque $P(J = j) = q_j$ et que $x - \tau_n$ est de loi exponentielle de paramètre λ . En effet, $(N_t)_t$ est un processus de Poisson de paramètre λ et donc, l'âge courant en x est de loi exponentielle de même paramètre.

Posons, à présent

$$P_n(x) = e^{-\lambda x} A_n(x) \text{ lorsque } x \geq v_n \quad (2.5)$$

On substitue cette expression dans les formules (2.2) et (2.4). Notons que la condition (2.5) ne pose aucune difficulté supplémentaire. En effet, $v_n \geq v_{n-j}$ pour $j = 1 \dots n$. Par conséquent, $x \geq v_n \Rightarrow t \geq v_{n-j}$ dans le membre de droite de l'équation (2.4).

On obtient ainsi :

$$A_0(x) = 1 \quad (2.6)$$

$$A_n(x) = \int_{v_n}^x \sum_{j=1}^n q_j \lambda A_{n-j}(t) dt \quad \text{si } x \geq v_n \quad (2.7)$$

Ces formules définissent $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon récursive, $A_n(x)$ étant un polynôme de degré n défini pour tout x . On gardera les deux conditions suivantes équivalentes qui définissent les polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon unique :

$$A_n(v_n) = 0 \quad (2.8)$$

$$A'_n(x) = \sum_{j=1}^n q_j \lambda A_{n-j}(x) \quad \text{pour } n > 0 \quad (2.9)$$

On remarque que, dans le cas Poisson ($S_t = N_t$), on a :

$$A'_n = \lambda A_{n-1} \text{ pour } n > 0 \quad (2.10)$$

puisque tous les sinistres sont égaux à 1 et donc $q_j = \delta_{1,j}$.

De façon équivalente, on a :

$$(\lambda^{-n} A_n)' = \lambda^{-(n-1)} A_{n-1} \text{ pour } n > 0 \quad (2.11)$$

Par conséquent, la famille $\{\lambda^{-n} A_n, n = 0, 1, \dots\}$ est une famille de polynômes d'Appell.

Dans le cadre général, nous montrerons comment transformer $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ en une famille de polynômes d'Appell généralisés d'une structure similaire.

Pour en revenir au temps de ruine, on a obtenu les résultats suivants :

THÉORÈME 2.1 : $P(S_x = n \cap T > x) = e^{-\lambda x} A_n(x) 1_{\{x \geq v_n\}}$, les polynômes A_n sont donnés par les formules suivantes :

$$A_0(x) = 1 \quad (2.6)$$

$$A_n(v_n) = 0 \quad (2.8)$$

$$A'_n(x) = \sum_{j=1}^n q_j \lambda A_{n-j}(x) \text{ pour } n > 0 \quad (2.9)$$

COROLLAIRE 2.2 : On a

$$- P(T > x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) 1_{\{x \geq v_n\}} .$$

$$- \text{Lorsque } \nu_j < x \leq \nu_{j+1}, \text{ on a : } P(T > x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^j A_n(x).$$

Démonstration :

$$- P(T > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > x \cap S_x = n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} A_n(x) 1_{\{x \geq v_n\}}$$

$$- \text{Lorsque } \nu_j < x \leq \nu_{j+1}, \text{ on a : } 1_{\{x \geq v_n\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

D'où :

$$P(T > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > x \cap S_x = n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} A_n(x) 1_{\{x \geq v_n\}} = \sum_{n=0}^j e^{-\lambda x} A_n(x)$$

□

Comme on vient de le voir, la probabilité de survie s'exprime en fonction d'une série de polynômes. Tout l'enjeu reste de trouver leurs expressions.

3 Construction des polynômes A_n

3.1 La structure d'Appell généralisée

Commençons par introduire une famille spéciale de polynômes et un opérateur non standard à l'aide de la fonction génératrice des polynômes.

DÉFINITION 3.1 : La famille de polynômes $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est définie par sa fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) s^n = e^{xg(s)} \quad (3.1)$$

avec $g(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j$. On définit ainsi l'opérateur Δ par

$$\begin{cases} \Delta e_{n+1} = e_n, & n > 0 \\ \Delta e_0 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Les puissances de Δ étant construites récursivement par $\Delta^{r+1} = \Delta(\Delta^r)$, $r \geq 0$ avec Δ^0 l'opérateur identité.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(x) s^n &= e^{xg(s)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xg(s))^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda q_j s^j \right)^n \\ &= \frac{x^0}{0!} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda q_j s^j \right)^0 + \frac{x^1}{1!} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda q_j s^j \right)^1 + \dots \\ &= 1 + \lambda q_1 x s + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j_1 \dots j_n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda^n \left(\prod_{i=1}^n q_{j_i} \right) s^{\sum_{i=1}^n j_i} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{j_1 \dots j_n \\ \sum j_i = n}} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^n q_{j_i} \right)}_{\text{degré } n \text{ en } x} s^n \end{aligned}$$

On a donc les caractéristiques suivantes :

- e_n est un polynôme de degré n
- $e_0 = 1$
- $e_1(x) = \lambda q_1 x$
- $e_n(0) = \frac{0^n}{n!} = \delta_{n0}$.

Grâce à la formule (3.2), on conclut que $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de polynômes d'Appell généralisée par rapport à l'opérateur Δ .

PROPRIÉTÉ 3.2 : On a $e'_n = \sum_{j=1}^n \lambda q_j e_{n-j}$ avec $n > 0$.

Démonstration :

On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x) s^n &= (e^{xg(s)})'_x \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} g(s) e_m(x) s^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^{m+j} e_m(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda q_j e_m(x) s^{m+j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \lambda q_j e_{n-j}(x) s^n \quad (m = n + j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \lambda q_j e_{n-j}(x) s^n
\end{aligned}$$

Ainsi, par identification entre le premier et le dernier terme, on obtient les formules attendues.

□

THÉORÈME 3.3 :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $A'_n = \sum_{j=1}^n \lambda q_j A_{n-j}$ avec $n > 0$
2. $\Delta A_n = A_{n-1}$ avec $n > 0$
3. $A_n = \sum_{i=0}^n b_i e_{n-i}$ avec $n \geq 0$ et une famille bien choisie de nombre $\{b_i, i \geq 0\}$

On peut remarquer que la première assertion correspond à l'équation différentielle (2.9) définissant notre problème de temps de ruine. Les suivantes permettent de définir un problème équivalent résoluble grâce aux outils définis.

Démonstration :

– (1) \Rightarrow (2)

On va tout d'abord montrer une équivalence de (1) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A'_n(x) s^n = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda q_j s^j A_{n-j}(x) s^{n-j} = g(s) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) s^n \quad (3.3)$$

De plus, on a

$$A_j(0) = b_j, \text{ avec } j \geq 0 \quad (3.4)$$

et, $\{b_j, j \in \mathbb{N}\}$ étant donné, les polynômes A_n sont déterminés.

Ainsi, les relations (3.3) et (3.4) déterminent une famille unique $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ puisque l'équation (3.3) est une équation différentielle ordinaire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)s^n = B(s)e^{xg(s)} \quad (3.5)$$

avec $B(s) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j$.

Ainsi, il vient par (3.1) et (3.2) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta A_n(x)s^n &= B(s)\Delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)s^n \right) \\ &= B(s) \sum_{n=1}^{\infty} e_{n-1}(x)s^n \\ &= sB(s)e^{xg(s)} \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}(x)s^n \end{aligned}$$

Par identification, on obtient la relation (2)

– (2) \Rightarrow (3)

Exprimons A_n comme $\sum_{i=0}^n b_{ni}e_{n-i}$ puisque tout polynôme de degré n peut se décomposer en une somme de polynômes de degré inférieur ; Par (2), on obtient la formule :

$$\Delta A_n = A_{n-1} \Rightarrow \sum_{i=0}^n b_{ni}e_{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1,i}e_{n-i-1} \quad (3.6)$$

Ainsi, par identification des termes en e_{n-1-i} , on obtient l'égalité $b_{ni} = b_{n-1,i}$ pour tout n et i . Ceci montre que b_{ni} est indépendant de n et peut être noté b_i . On a donc montré (3).

– (3) \Rightarrow (1)

Par la propriété (3.2) et (3), on obtient :

$$\begin{aligned}
A'_n &= \sum_{i=0}^n b_i e'_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left(\sum_{j=1}^{n-i} \lambda q_j e_{n-i-j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda q_j \sum_{i=0}^{n-j} b_i e_{n-j-i} \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda q_j A_{n-j}
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.4 :

$A_n = \sum_{i=0}^n b_i e_{n-i}$, avec $n \geq 0$, donne les polynômes A_n cités par le théorème 2.1 en construisant les b_i récursivement par $\sum_{i=0}^n b_i e_{n-i}(v_n) = \delta_{n0}$.

Démonstration :

Les polynômes du théorème 2.1 satisfont la relation (2.9) (donc le point (3) du théorème 3.3) et les relations (2.6), (2.8) (i.e. $A(v_n) = \delta_{n0}$).

□

3.2 Quelques expressions des polynômes de e_n

3.2.1 Quelques expressions simples des polynômes e_n

Nous considérons ici des formes spéciales de $\{q_j, j \in \mathbb{N}\}$. Le but est de déterminer les formes explicites des polynômes e_n .

Pour ce faire, nous développons les calculs en trois étapes. Tout d'abord, nous utilisons les séries entières pour calculer $g(s)$ puis pour développer $e^{xg(s)}$ et nous en déduisons les expressions des e_n (par identification avec la fonction génératrice des polynômes).

– Une distribution logarithmique est caractérisée par :

$$q_i = P(J = i) = \frac{\rho \alpha^i}{i} \text{ avec } i \geq 1, 0 < \alpha < 1 \text{ et } \rho = -\frac{1}{\ln(1-\alpha)}$$

On a,

$$\begin{aligned}
g(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda \rho \frac{(\alpha s)^j}{j} \\
&= -\lambda \rho \ln(1 - \alpha s)
\end{aligned}$$

en reconnaissant le développement en série entière de $\ln(1 - \alpha s)$.

Ainsi, $e^{xg(s)} = (1 - \alpha s)^{-\lambda \rho x}$.

De plus, en développant en série entière le membre de droite, on obtient

$$(1 - \alpha s)^{-\lambda \rho x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-\lambda \rho x} (-\alpha s)^n.$$

Enfin, $e^{xg(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) s^n$ et, par identification, $e_n(x) = C_n^{-\lambda \rho x} (-\alpha)^n$, avec $n \geq 0$.

– Une distribution de Poisson translatée est caractérisée par :

$$q_i = \frac{e^{-\alpha} \alpha^{i-1}}{(i-1)!} \text{ avec } i \geq 1, \alpha > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda \frac{e^{-\alpha} \alpha^{j-1}}{(j-1)!} s^j \\ &= \lambda s e^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} \\ &= \lambda s e^{\alpha(s-1)} \end{aligned}$$

Ainsi, $e^{xg(s)} = e^{\lambda s x e^{\alpha(s-1)}}$.

De plus, en développant en série entière le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\lambda s x e^{\alpha(s-1)}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s x e^{\alpha(s-1)})^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s x)^n e^{\alpha n(s-1)}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n} (\lambda x)^n s^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha n s)^k}{k!}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} (\lambda x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha n)^k s^{n+k}}{n! k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} e^{-\alpha(m-k)} (\lambda x)^{m-k} \frac{(\alpha(m-k))^k s^m}{(m-k)! k!} \text{ en posant } m = n + k \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m e^{-\alpha(m-k)} (\lambda x)^{m-k} \frac{(\alpha(m-k))^k}{(m-k)! k!} s^m \end{aligned}$$

Enfin $e^{xg(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) s^n$ et, par identification :

$$e_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-\alpha(n-k)} (\lambda x)^{n-k} \frac{(\alpha(n-k))^k}{(n-k)!k!} = \sum_{j=0}^n (\lambda e^{-\alpha})^j \frac{(j\alpha)^{n-j} x^j}{j!(n-j)!}$$

(en faisant le changement d'indice $j = n - k$).

$$\text{Ainsi, } e_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(\lambda e^{-\alpha})^j (j\alpha)^{n-j}}{j!(n-j)!} x^j.$$

– Une distribution binomiale négative est caractérisée par :

$$q_i = \binom{-r}{i-1} (1-\alpha)^r (-\alpha)^{i-1}, \text{ avec } i \geq 1, 0 < \alpha < 1, r > 0$$

On a,

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda C_{j-1}^{-r} (1-\alpha)^r (-\alpha)^{j-1} s^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda C_j^{-r} (1-\alpha)^r (-\alpha)^j s^{j+1} \\ &= \lambda (1-\alpha)^r s \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{-r} (-s\alpha)^j \\ &= \lambda (1-\alpha)^r s (1-\alpha s)^{-r} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } e^{xg(s)} = e^{\lambda x (1-\alpha)^r s (1-\alpha s)^{-r}}.$$

De plus, en développant en série entière le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\lambda x (1-\alpha)^r s (1-\alpha s)^{-r}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r s (1-\alpha s)^{-r})^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r)^m s^m (1-\alpha s)^{-mr}}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r)^m s^m \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{-mr} (-s\alpha)^j}{m!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r)^m s^{m+j} C_j^{-mr} (-\alpha)^j}{m!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r)^{n-j} s^n C_j^{-(n-j)r} (-\alpha)^j}{(n-j)!} \quad (n = m + j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda x (1-\alpha)^r)^i C_{n-i}^{-ir} (-\alpha)^{n-i}}{i!} s^n \quad (i = n - j) \end{aligned}$$

Enfin, $e^{xg(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)s^n$ et, par identification,

$$e_n(x) = \sum_{i=0}^n C_{n-i}^{-ir} (1-\alpha)^{ri} (-\alpha)^{n-i} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$$

On vient de voir que dans les cas logarithmique, Poisson et Binomiale Négative, les polynômes $\{e_n\}_n$ ont une expression explicite.

3.2.2 Le cas général

En utilisant la relation (1.0) et la définition 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} E(s^{S_i}) &= E(s^{\sum_{i=1}^{N_t} W_i}) &&= E(E(s^{W_1 \cdot N_t} | N_t)) && \text{puisque } (W_i) \text{ sont iid} \\ &= E((E(s^{W_1}))^{N_t}) && \text{puisque } W_1 \perp N_t \\ &= E\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j\right)^{N_t}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j\right)^i P(N_t = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j\right)^i \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t \sum_{j=0}^{\infty} s^j q_j\right)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda t} \exp\left(t \sum_{j=0}^{\infty} \lambda s^j q_j\right) = e^{-\lambda t + tg(s)} \end{aligned}$$

Par définition de la fonction génératrice des probabilités, on a :

$$E(s^{S_t}) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(S_t = n)$$

De plus,

$$e^{tg(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(t) s^n$$

Ainsi, par identification

$$P(S_t = n) = e^{-\lambda s} e_n(t), \text{ avec } n \geq 0 \quad (3.7)$$

De plus, introduisons

$$q_j^{*k} = P(W_1 + \dots + W_k = j), \text{ avec } k > 0 \text{ et } q_j^{*0} = \delta_{j0}$$

On a donc

$$P(S_t = n) = P(W_1 + \dots + W_{N_t}) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} q_n^{*k}, \text{ avec } n \geq 0 \quad (3.7')$$

Ainsi, on déduit de (3.7) et de (3.7') que :

$$e_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda x)^k}{k!} q_n^{*k}, \text{ avec } n \geq 0 \quad (3.8)$$

3.3 Un petit peu plus sur la structure d'Appell

PROPRIÉTÉ 3.5 : On a $\Delta S^a = S^a \Delta$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, où $S^a f(x) = f(x+a)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Par (3.1) et (3.2), on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S^a \Delta \left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) s^n \right) &= S^a \left(x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e_{n-1}(x) s^n \right) \\ &= s S^a (x \mapsto e^{xg(s)}) \\ &= s e^{(x+a)g(s)} \\ &= e^{ag(s)} \sum_{j=1}^{\infty} e_{j-1}(x) s^j \\ &= e^{ag(s)} \Delta (x \mapsto e^{xg(s)}) \\ &= \Delta (x \mapsto e^{(x+a)g(s)}) \\ &= \Delta S^a (x \mapsto e^{xg(s)}) \\ &= \Delta S^a \left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) s^n \right), \end{aligned}$$

□

PROPRIÉTÉ 3.6 : $\left\{ \frac{n e_n(x)}{x}, n \in \mathbb{N} \right\}$ a une structure d'Appell par rapport à l'opérateur Δ . De plus, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une structure d'Appell par rapport à l'opérateur $\Lambda = \Delta S^{-\frac{1}{c}}$ avec :

$$f_n(x) = \frac{cx}{cx+n} e_n \left(x + \frac{n}{c} \right),$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que l'opérateur associé à la famille passe d'un polynôme à son précédent.

On veut établir dans un premier temps l'égalité suivante :

$$\Delta \left(\frac{n e_n(x)}{x} \right) = (n-1) \frac{e_{n-1}(x)}{x}, \text{ pour } n > 0, \quad (3.9)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) n s^n &= s \left(e^{xg(s)} \right)'_s \\
&= s x g'(s) e^{xg(s)} \\
&= s x \sum_{j=1}^{\infty} \lambda j q_j s^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} e_k(x) s^k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda j x q_j e_k(x) s^{k+j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \lambda j x q_j e_{n-j}(x) s^n \text{ avec } n = k + j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \lambda j x q_j e_{n-j}(x) s^n
\end{aligned}$$

En identifiant les termes en s^n , on obtient :

$$n e_n(x) = x \sum_{j=1}^n j \lambda q_j e_{n-j}(x), \text{ pour } n > 0 \quad (3.10)$$

Ainsi

$$\Delta \left(\frac{n e_n(x)}{x} \right) = \sum_{j=1}^{n-1} j \lambda q_j e_{n-1-j}(x)$$

En utilisant la relation (3.10) une nouvelle fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
(n-1) e_{n-1}(x) &= x \sum_{j=1}^{n-1} j \lambda q_j e_{n-1-j}(x) \\
&= x \Delta \left(\frac{n e_n(x)}{x} \right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré l'égalité voulue. On veut à présent établir $\Lambda f_n = f_{n-1}$ pour $n > 0$. Pour cela, on utilise la propriété (3.5) et l'égalité (3.9) :

$$\begin{aligned}
\Lambda f_n &= \Delta S^{-\frac{1}{c}} \left(\frac{x}{x + \frac{n}{c}} e_n \left(x + \frac{n}{c} \right) \right) \\
&= \Delta S^{\frac{(n-1)}{c}} \left(\frac{x - \frac{n}{c}}{x} e_n(x) \right) \\
&= S^{\frac{(n-1)}{c}} \Delta \left(\frac{e_n(x) - n e_n(x)}{c x} \right) \\
&= S^{\frac{(n-1)}{c}} \left(\frac{e_{n-1}(x) - (n-1) e_{n-1}(x)}{c x} \right) \\
&= S^{\frac{(n-1)}{c}} \left(\frac{c x - n + 1}{c x} \right) e_{n-1}(x) \\
&= \frac{c x}{c x + n - 1} e_{n-1} \left(x + \frac{n-1}{c} \right) \\
&= f_{n-1}
\end{aligned}$$

Notons que $f_n(0) = \delta_{n0}$

□

PROPRIÉTÉ 3.7 :

Tout polynôme R admet un développement de Taylor par rapport à la famille $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ et l'opérateur Λ , i.e.

$$R(x) = \sum_r \Lambda^r R(0) f_r(x) \quad (3.11)$$

Démonstration :

Supposons R de degré n . Exprimons le comme suit :

$$R(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_i(x)$$

avec les $\{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\}$ qui conviennent.

Par la propriété 3.6, on a :

$$\Lambda^r R(0) = \sum_{i=r}^n \alpha_i \Lambda^r f_i(0) = \sum_{i=r}^n \alpha_i f_{i-r}(0) = \alpha_r$$

et donc

$$R(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=0}^n \Lambda^i R(0) f_i(x)$$

□

Comme on vient de voir, tout polynôme de degré n se décompose comme une somme de polynômes f_n et des opérateurs Λ^n . Par conséquent, on est apte à décomposer les polynômes A_n qui sont au centre de nos préoccupations.

4 Le cas linéaire

Examinons le cas spécial d'un taux de prime constant c . On rappelle que : $h(t) = u + ct$ et $v_n = \text{Max} \left(0, \frac{(n-u)}{c} \right)$, pour $n \geq 0$.

4.1 Expression des polynômes $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$

THÉORÈME 4.1 :

Dans le cas linéaire,

$$A_n(x) = \begin{cases} e_n(x) \text{ lorsque } 0 \leq n \leq u \\ \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) f_{n-j} \left(x + \frac{u-n}{c} \right) = \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{cx-n+u}{cx-j+u} e_{n-j} \left(x + \frac{u-j}{c} \right) \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

Démonstration :

Nous devons seulement vérifier que les polynômes $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ en question satisfont les égalités suivantes :

- $A_0 = 1$
- $A_n(v_n) = 0$
- $\Delta A_n = A_{n-1}$, pour $n > 0$

La première égalité est vérifiée puisque $e_0 = 1$.

La deuxième égalité vient du fait que $v_n = \frac{n-u}{c}$, et donc $cv_n - n + u = 0$. De plus, pour $n \leq u$, $v_n = 0$ et $e_n(0) = 0$.

Pour la troisième égalité, on distingue trois cas :

- Si $1 \leq n \leq u$, $\Delta A_n = A_{n-1}$ est équivalent à $\Delta e_n = e_{n-1}$; ce qui est vrai par (3.2)
- Si $1 + u \leq n$, en appliquant les propriétés 3.5 et 3.6, on obtient les égalités :

$$\begin{aligned}
\Delta A_n(x) &= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) f_{n-j} \left(x + \frac{u-n}{c} \right) \\
&= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) S^{\frac{u-n}{c}} f_{n-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) S^{\frac{u-n+1}{c}} \Lambda f_{n-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) S^{\frac{u-(n-1)}{c}} f_{n-1-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) f_{n-1-j} \left(x + \frac{u-(n-1)}{c} \right) \\
&= A_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

- Si $n = u + 1$, on doit vérifier que $\Delta A_{u+1} = e_u$. On a :

$$\begin{aligned}
e_u(x) &= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \Delta f_{u+1-j} \left(x - \frac{1}{c} \right) \\
&= \sum_{j=0}^u e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) f_{u-j}(x) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\Delta f_{u+1-j} \left(x - \frac{1}{c} \right) &= \Delta S^{-\frac{1}{c}} f_{u+1-j}(x) \\
&= \Lambda f_{u+1-j}(x) \\
&= f_{u-j}(x)
\end{aligned}$$

car les polynômes $(f_n)_n$ ont une structure d'Appell pour l'opérateur Λ .

Mais (4.2) peut être réécrit comme suit (avec $i = u - j$) :

$$e_u(x) = \sum_{i=0}^u e_{u-i} \left(-\frac{i}{c}\right) f_i(x) = \sum_{i=0}^u \Lambda^i e_u(0) f_i(x)$$

ce qui est vrai par la propriété (3.7).

□

On note deux cas particuliers :

- Lorsque $u = 0$: $A_n(x) = \frac{cx-n}{cx} e_n(x)$, pour $n \geq 0$
- Lorsque $u = 1$: $A_n(x) = \begin{cases} e_n(x) & \text{pour } n = 0, 1 \\ \frac{cx-n+1}{cx+1} e_n \left(x + \frac{1}{c}\right) & \text{pour } n > 1 \end{cases}$

4.2 La distribution de T

Par le corollaire 2.2 et le théorème 4.1, on aboutit à :

$$\begin{aligned} P(T > x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} A_n(x) 1_{\{x \geq Max(0, \frac{n-u}{c})\}} \\ &= e^{-\lambda x} \left(\sum_{n=0}^u e_n(x) + \sum_{n=u+1}^{\lfloor cx+u \rfloor} A_n(x) \right) \end{aligned}$$

THÉORÈME 4.2 : Dans le cas linéaire,

$$P(T > x | R_0 = u) = e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^u \left\{ e_j(x) + \sum_{n=u+1}^{\lfloor cx+u \rfloor} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{cx-n+u}{cx-n+u} e_{n-j} \left(x + \frac{u-j}{c} \right) \right\} \quad (4.3)$$

Remarque : Lorsque $u = 0$,

$$P(T > x | R_0 = 0) = e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\lfloor cx \rfloor} \frac{cx-n}{cx} e_n(x) \quad (4.4)$$

Dans le cas Poisson (tous les sinistres étant égaux à 1), on a :

$$e_n(x) = \frac{(\lambda x)^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

et

$$P(T > x | R_0 = 0) = \sum_{n=0}^{\lfloor cx \rfloor} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \left(1 - \frac{n}{cx} \right) \quad (4.5),$$

THÉORÈME 4.3 : Dans le cas linéaire,

$$P(T = +\infty | R_0 = u) = \left(1 - \frac{\lambda m}{c} \right) \sum_{j=0}^u e^{\lambda \frac{(u-j)}{c}} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \quad (4.6)$$

Démonstration :

Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} e_j(x) = 0$ pour tout j (dominance de l'exponentielle sur un polynôme), (4.3) donne

$$P(T = \infty | R_0 = u) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^u f_{uj}(x) \quad (4.7)$$

où

$$f_{\alpha ju}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=\alpha+1}^x 1_{\{x > (\frac{n-u}{c})\}} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{cx-n+u}{cx-j+u} e_{n-j} \left(x + \frac{u-j}{c} \right) \quad (4.8)$$

est définie pour tout entier naturel α . La preuve de (4.7) repose sur le fait que $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\alpha ju}(x)$ existe si et seulement si elle existe pour quelques valeurs de α ; et dans ce cas, cette limite ne doit pas dépendre de α . De (4.8), on obtient :

$$\begin{aligned} f_{jjj}(x - \frac{u-j}{c}) &= e^{-\lambda(x - \frac{u-j}{c})} \sum_{n=j+1}^{\infty} 1_{\{x - \frac{u-j}{c} > \frac{n-u}{c}\}} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{cx-n+j}{cx} e_{n-j}(x) \\ &= e^{\lambda(\frac{u-j}{c})} e^{-\lambda x} \sum_{m=1}^{\infty} 1_{\{x > \frac{m}{c}\}} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{cx-m}{cx} e_m(x) \text{ avec } m = n-j \\ &= e^{\lambda(\frac{u-j}{c})} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) f_{000}(x) \end{aligned}$$

Mais, à partir de (4.7), on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{000}(x) = P(T = \infty | R_0 = 0) = 1 - \frac{\lambda m}{c} \quad (4.9)$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{jjj}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_{jjj}(x - \frac{u-j}{c}) = \left(1 - \frac{\lambda m}{c} \right) e^{\lambda(\frac{u-j}{c})} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \quad (4.10)$$

et puisque la limite de $f_{jjj}(x)$ existe, la limite de $f_{\alpha ju}(x)$ existe également pour tout α . Ainsi, le membre de droite de la dernière formule donne la valeur de la limite. On obtient donc l'égalité voulue. □

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons transformé une probabilité (sur la distribution du temps de ruine) en un problème algébrique (sur la caractérisation d'une certaine classe de polynômes).

Le théorème clé de cet article (théorème 3.3) nous permet de faire le lien entre la probabilité de ruine et les polynômes d'Appell généralisés. Nous avons ensuite caractérisé ces polynômes pour aboutir à une formule fermée de la probabilité de non ruine en supposant un taux de prime est constant. Enfin, quelques expressions explicites de ces polynômes (donc de la probabilité de ruine) ont été données pour certaines distributions de montant de sinistres.

Le nombre d'hypothèses de ce modèle est assez faible : l'occurrence des sinistres suit un processus de Poisson et les montants de sinistres sont supposés entiers. Une extension logique de ce modèle serait de relâcher l'hypothèse concernant les survenances de sinistres. Il serait intéressant d'étudier davantage de distributions de montants de sinistres et de faire quelques applications numériques.